VNU Journal of Science: Education Research, Vol. 39, No. 3 (2023) 100-107

VNU Journal of Science: Education Research

Journal homepage: https://js.vnu.edu.vn/ER

Original Article

Studying the Application of Teaching Mathematics Probability for High School Pupils and University Students

Vu Tien Viet[1,2,*]

[1]*People's Security Academy, 125 Tran Phu, Ha Dong, Hanoi, Vietnam*
[2]*Hanoi Mathematical Society, 334 Nguyen Trai, Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam*

Received 25 April 2023
Revised 31 May 2023; Accepted 15 June 2023

Abstract: We would like to introduce some studies on applying problem situations in teaching Probability Mathematics for high school students according to the 2018 educational program and for students in schools of Economics and Social Sciences & Humanities.

Keywords: Teaching, Probability.

[*] Corresponding author.
E-mail address: vutienviet.56@gmail.com

https://doi.org/10.25073/2588-1159/vnuer.4786

Nghiên cứu ứng dụng giảng dạy Toán Xác suất cho học sinh phổ thông và sinh viên

Vũ Tiến Việt[1,2,*]

[1]Học viện An ninh Nhân dân, 125 Trần Phú, Hà Đông, Hà Nội, Việt Nam
[2]Hội Toán học Hà Nội, 334 Nguyễn Trãi, Thanh Xuân, Hà Nội, Việt Nam

Nhận ngày 25 tháng 4 năm 2023
Chỉnh sửa ngày 31 tháng 5 năm 2023; Chấp nhận đăng ngày 15 tháng 6 năm 2023

Tóm tắt: Xin giới thiệu một vài kinh nghiệm về giảng dạy Xác suất cho học sinh phổ thông theo chương trình giáo dục 2018 và cho sinh viên các trường thuộc khối Kinh tế và Khoa học Xã hội và Nhân văn.

Từ khóa: Giảng dạy, Xác suất.

1. Mở đầu

(Xem [1, 2] và [3]) Trong các sách giáo khoa và giáo trình về Xác suất ta đã biết *Định nghĩa cổ điển* về Xác suất là: với phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu **Ω** với số lượng hữu hạn *n* phần tử (outcome - biến cố sơ cấp) có khả năng xuất hiện ngang nhau, thì xác suất của biến cố A (tập con của **Ω**) với số lượng *m* phần tử ($0 \le m \le n$) được tính theo công thức:

$$P(A) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

Định nghĩa này được đưa ra khi môn học Xác suất mới ra đời thế kỷ XVII khi hai nhà khoa học người Pháp là Blaise Pascal (1623-1662) và Pierre de Fermat (1601-1665, vốn là một luật sư) trao đổi thư từ cho nhau bàn về những khả năng trong các trò chơi may rủi.

Trong giảng dạy môn học này còn khô khan, khó hiểu, khó áp dụng. Mặt khác, trong định nghĩa này, 2 yêu cầu cơ bản là: số khả năng *n* của không gian mẫu **Ω** phải hữu hạn, khả năng xuất hiện của các biến cố sơ cấp (outcome) phải ngang nhau.

Nhiều học sinh và sinh viên đã hỏi: khi không thỏa mãn 1 trong 2 hoặc cả 2 yêu cầu đó, thì không sử dụng được định nghĩa trên, vậy cách giải quyết thế nào?

Để trả lời, chúng tôi đã tham khảo các tài liệu chuyên ngành, tìm ra lời giải đáp và đó là lý do ra đời bài báo nghiên cứu này.

2. Nghiên cứu lý thuyết

(Xem [4]) Khi các phần tử (outcome - biến cố sơ cấp) của không gian mẫu **Ω** không có khả năng xuất hiện ngang nhau hoặc số lượng phần tử của **Ω** là vô hạn (nhưng đếm được) thì chúng ta cần sử dụng một định nghĩa khác (mà chúng tôi tạm gọi là *tân cổ điển*) như sau:

Giả sử không gian mẫu **Ω** bao gồm một số hữu hạn (hoặc đếm được) các phần tử (outcome - biến cố sơ cấp), nhưng khả năng xuất hiện của chúng là không như nhau. Chẳng hạn, tung một đồng xu không cân đối và không đồng chất.

Ta gán cho mỗi phần tử $\omega_i \in \Omega$, ($i=1,2,\ldots$) một *trọng số*, ký hiệu là $\mathrm{P}(\omega_i)$ và gọi đó là *xác suất* của. ω_i Ta giả thiết rằng:

a) $\mathrm{P}(\omega_i) \ge 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots$

b) $\mathrm{P}(\omega_1) + \mathrm{P}(\omega_2) + \ldots = 1$

Từ các xác suất $\mathrm{P}(\omega_i)$ của các ω_i, với mỗi biến cố A của không gian mẫu **Ω**, ta định nghĩa

---

[*] Tác giả liên hệ.
Địa chỉ email: vutienviet.56@gmail.com

https://doi.org/10.25073/2588-1159/vnuer.4786

xác suất của A là số P(A) được xác định bởi công thức:

$$P(A)=\sum_{\omega_i\in A} \mathrm{P}(\omega_i)$$

Nhận xét. Nếu không gian mẫu **Ω** chỉ gồm một số hữu hạn các phần tử $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ và khả năng xảy ra của chúng như nhau, thì bằng cách gán:

$$\mathrm{P}(\omega_1)+\mathrm{P}(\omega_2)=\cdots=\mathrm{P}(\omega_n)=\frac{1}{n},$$

ta được xác suất của biến cố A là:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}$$

Như vậy định nghĩa tân cổ điển hoàn toàn phù hợp với định nghĩa cổ điển đã xét.

Với định nghĩa tân cổ điển, các tính chất của xác suất vẫn giữ nguyên giá trị như trường hợp định nghĩa cổ điển.

(Xem [4, 5] và [6]) Trong trường hợp khi số lượng phần tử của không gian mẫu **Ω** là vô hạn (không đếm được), người ta sử dụng *định nghĩa dưới dạng hình học* để xác định xác suất. Khi đó không gian mẫu **Ω** được biểu diễn thành một miền hình học, còn biến cố A là một miền con của **Ω** và xác suất của A được xác định bởi công thức:

$$P(A)=\frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$$

trong đó mes(.) chỉ độ đo (measure) của miền hình học tương ứng.

(Xem [4, 5] và [6]) Đối với những hiện tượng xảy ra rất nhiều lần, người ta có thể dùng *tần suất thống kê* để xác định xác suất của sự kiện xảy ra hiện tượng đó. Đó là giá trị ổn định của tần suất.

$$P(A)=\frac{\neq(A)}{\neq(\Omega)}$$

trong đó $\neq(\Omega)$ là tổng số các trường hợp được khảo sát và $\neq(A)$ là số các trường hợp được khảo sát thoả mãn điều kiện xảy ra A.

Cơ sở toán học của việc sử dụng định nghĩa bằng tần suất thống kê là *Luật số lớn* và các *Định lý giới hạn* mà ta không có điều kiện nói đến ở đây.

3. Áp dụng và thực nghiệm

Ví dụ 1. (Xem [4]. Minh họa cho việc không gian mẫu có vô hạn nhưng đếm được phần tử) Tung một đồng tiền xu cho đến khi nào xuất hiện mặt ngửa (N) đầu tiên thì dừng lại. Không gian mẫu là:

$$\Omega=\{N, SN, SSN, ..., SS...SN, ...\}.$$

Vì số lượng các phần tử của không gian mẫu là vô hạn (đếm được), nên ta sẽ sử dụng định nghĩa xác suất tân cổ điển. Gán

$$P(N)=\frac{1}{2}$$

cho biến cố chỉ tung một lần là thành công. Gán

$$P(SN)=\frac{1}{4}$$

cho biến cố phải tung đến lần thứ hai mới thành công. Gán

$$P(SSN)=\frac{1}{8}$$

cho biến cố phải tung đến lần thứ ba mới thành công. Tương tự như thế ta gán cho $\omega_n \in \Omega$ xác suất là:

$$p(\omega_n)=P(\underbrace{SS...S}_{n-1}N)=\frac{1}{2^n},\ n=1,2,...$$

Ta có

$$\sum_{\omega_n\in\Omega} p(\omega_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1,$$

suy ra rằng nếu cứ tung đồng xu liên tiếp mãi thì chắc chắn (với xác suất bằng 1) xuất hiện mặt ngửa (N) và cũng có nghĩa là không thể xảy ra (với xác suất bằng 0) trường hợp chỉ hoàn toàn xuất hiện mặt sấp (S).

Đặt A là biến cố phép thử thành công ở những lần tung đồng tiền xu có thứ tự chẵn, tức là:

$$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, ...\},$$

do đó:

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...=\frac{1}{3}.$$

Từ đây cũng suy ra rằng xác suất của $\overline{A}$ là biến cố phép thử thành công ở những lần tung đồng tiền xu có thứ tự lẻ, sẽ bằng $\frac{2}{3}$.

Bài toán này có thể mô tả thành bài toán vui: một gia đình sinh con cho đến khi nào sinh được con trai (hoặc con gái) thì dừng lại.

Ví dụ 2. (Xem [4, 5] và [6]. Minh họa cho việc không gian mẫu có vô hạn nhưng không đếm được phần tử). Hai người X và Y hẹn gặp nhau tại một địa điểm nào đó trong khảng từ 12 giờ đến 1 giờ. Thời gian xuất hiện tại điểm hẹn của mỗi người là ngẫu nhiên. Không gian mẫu là:

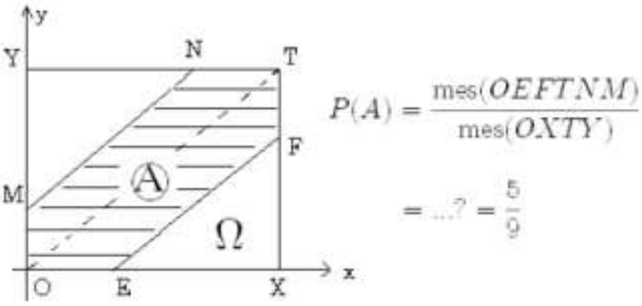
$$\Omega = \{\omega : \omega = (x, y),\ 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\},$$

trong đó x là thời điểm xuất hiện của người thứ nhất còn y là thời điểm xuất hiện của người thứ hai (tính bằng phút).

Với biến cố

$$A = \{(x, y) : |x - y| \le 20\},$$

thì A là biến cố người nào đến điểm hẹn trước sẽ đợi người kia 20 phút rồi bỏ đi nếu người kia không xuất hiện (Hình 1).



Hình 1. Hình minh họa cho bài toán 2 người hẹn gặp nhau.
Nguồn: B. V. Gnhedenko (Tài liệu tham khảo [5]).

Trên hệ trục toạ độ Oxy hình chữ nhật OXTY với các điểm

X(60,0), T(60,60), Y(0,60)$ thể hiện không gian mẫu Ω.

Mỗi điểm $(x, y) \in \Omega$ biểu diễn thời điểm đến điểm hẹn của người X là x và thời điểm đến điểm hẹn của người Y là y. Ta có

$$A = \{(x, y) \in \Omega \,\|\, x - y| \le 20\}$$

$$= \{(x, y) \in \Omega \,|\, x - 20 \le y \le x + 20\}$$

Hình đa giác OEFTNM với các đường thẳng giới hạn EF: y=x-20 và MN: y=x+20 thể hiện biến cố A.

Ví dụ 3. Bài toán Chiếc kim của Buffon. (Xem [5] và [6]. Minh họa cho việc định nghĩa xác suất bằng thống kê tần suất).

Một bài toán nổi tiếng ứng dụng định nghĩa xác suất bằng bằng hình học là bài toán *Chiếc kim của Buffon.*

Bá tước George-Luis Leclerc de Buffon (1707-1788) là một nhà khoa học tự nhiên lớn, nghiên cứu về thực vật, động vật, trái đất, lịch sử tự nhiên,... Thời trẻ ông đặc biệt thích Toán học. Năm 1733 ông trình lên Viện hàn lâm khoa học Paris một công trình về trò chơi franc-careau (là một trò trơi cá cược thịnh hành thời đó: người ta tung một đồng tiền xu vào một hình ô vuông và cá cược nhau xem vị trí nó sẽ nằm ở chỗ nào).

Trong công trình này các phép tính vi phân và tích phân đã được Buffon đưa vào để tính xác suất (theo định nghĩa bằng hình học). Bài toán chiếc kim được Buffon nêu ra như sau:

Trên một tờ giấy lớn kẻ các đường thẳng song song cách đều nhau một khoảng cách lớn hơn chiều dài của một chiếc kim. Tung chiếc kim một cách ngẫu nhiên lên tờ giấy. Có hai khả năng xảy ra, hoặc là chiếc kim đè vào một trong các đường thẳng, hoặc là chiếc kim nằm giữa hai đường thẳng. Với định nghĩa xác suất bằng hình học (có sử dụng đến phép tính vi tích phân) Buffon tính được xác suất để chiếc kim đè lên một trong các đường thẳng là p = $2/\pi$.

Mặt khác, nếu tung chiếc kim *n* lần mà có *m* lần kim nằm đè lên đường thẳng (đè ĐT) thì ta được tần suất là $\overline{p}=m/n.$ Với quan điểm định nghĩa xác suất bằng tần suất thống kê ta có thể coi $p\approx\overline{p}.$ Từ đó suy ra có thể tính xấp xỉ $\pi\approx 2n/m.$

Chính là từ đây đã xuất hiện thuật ngữ "*thả kim tìm* π ".

Phương pháp tung kim của Buffon là tiền thân của phương pháp Monte-Carlo sau này.

Bá tước Buffon (1707-1788) hay đúng hơn là Bá tước của xứ Buffon là một nhà bác học người Pháp, tên thật của ông là Georges Louis Leclerc. Ông sinh ngày 7/9/1707 tại Monbard, Côte d'Or, Pháp và mất vào ngày 16/4/1788 tại Paris. Buffon nổi tiếng với vai trò là một nhà tự nhiên học nhưng thời trẻ ông có niềm đam mê với toán học mặc dù khi đó ông đang theo đuổi tham vọng của cha mình là trở thành một luật sư. Từ năm 1739, Buffon trở thành người quản lý của Vườn Thực vật Hoàng gia (Jardin du Roi) và ông làm việc ở đây cho đến cuối đời. Tác phẩm nổi tiếng nhất của Buffon là Histoire Naturelle (Lịch sử Tự nhiên, 1749 - 1785) trình bày mọi vấn đề về thiên nhiên từ con người, động vật, thực vật tới khoáng vật.

Một đêm của năm 1777, tại một tòa nhà sang trọng ở thủ đô Paris của nước Pháp có một nhóm người đang xúm xít quanh một tờ giấy lớn có kẻ những đường thẳng song song cách đều nhau và kì lạ là họ đang thay phiên ném những chiếc kim vào tờ giấy đó theo ý muốn của vị chủ nhà.

"*Thưa Bá tước, 33 cắt và 77 không*" - một vị khách lên tiếng.

Ở gần đó, một ông già 70 tuổi liền ghi chép những con số vào một tờ giấy đang cầm trên tay. Đó chính là ngài Bá tước Buffon, chủ nhân của ngày hôm ấy.

"*Ồ, cảm ơn các vị đã giúp tôi! Tôi nghĩ bao nhiêu đây cũng đủ cho chúng ta rồi!*" - ông Bá tước lên tiếng.

Sau đó Buffon cúi xuống tính toán gì đó trên tờ giấy, mất một lúc thì lại nói tiếp:

"*Tổng cộng có 1106 lần ném và trong đó có 704 lần kim giao với các đường thẳng. Vậy là chúng ta có số pi gần bằng 3,142 chính là tỉ lệ giữa 2212 và 704*".

Khi Boffon nói xong, mọi người có mặt ở đó đều ngơ ngác, đưa mắt nhìn nhau, đó là những ánh mắt tràn đầy nghi hoặc nhưng cũng có những đôi mắt lại tràn đầy hứng thú. Mất một lúc lâu, rồi như không nén được tò mò, họ cùng hướng về Buffon chờ đợi từ ông một lời giải thích. Ngay lúc ấy, các khách mời đều nhận ra ở con người ấy một sự kêu hãnh đang ngự trị trong tâm hồn. Ông Bá tước già rảo cặp mắt sáng hoắt của mình một lượt quanh căn phòng ấm cúng rồi bắt đầu nói:

"*Mọi chuyện là như thế này,...*"

Nếu đọc đến đây mà bạn không thốt lên đầy ngỡ ngàng "*việc ném kim thì có liên quan gì đến số pi?*" thì tôi cược là bạn đã từng nghe qua câu chuyện này rồi. Không biết chính xác ngày hôm ấy Buffon đã giải thích cho những vị khách của ông như thế nào, nhưng dưới đây xin trình bày cơ sở Toán học giải đáp cho điều tuyệt vời trong câu chuyện trên.

Giả sử *2a* là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song liền kề trên tờ giấy và *2l* là chiều dài của những cây kim sao cho l ≤ a. Gọi *x* là khoảng cách từ trung điểm của kim đến đường thẳng gần nó nhất và gọi $\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ là góc hợp bởi kim và các đường thẳng. Ta có hình minh họa như sau (Hình 2).

Không gian mẫu **Ω** ở đây là hình chữ nhật có một chiều là *a* một chiều là $\frac{\pi}{2}$ diện tích là

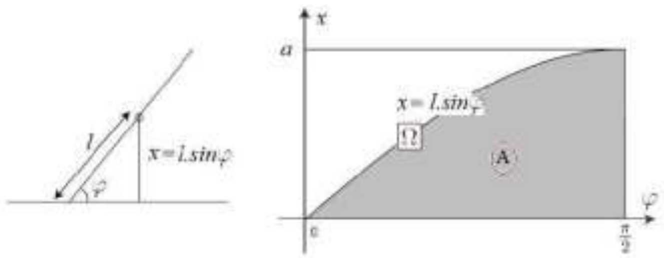
$\mathrm{mes}(\Omega)=\frac{a\pi}{2}.$

Kim gặp đường thẳng khi $0\le x=l.\sin\varphi\le a.$ Biến cố A ở đây là hình thang cong (tô đậm trên hình vẽ), có diện tích là $\mathrm{mes}\,(A)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} l.\sin\varphi d\varphi=l.$ Suy ra xác suất để kim gặp đường thẳng là $P(A)=\frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)}=\frac{2l}{a\pi}.$

Mặt khác, khi gieo những cây kim với *n* lần đủ lớn và trong số đó có *m* lần cắt các đường thẳng thì theo luật số lớn và định nghĩa xác suất theo tần suất thống kê, xác suất của sự kiện A được tính bởi công thức:

$$p(A) = p \approx \overline{p} = \frac{m}{n}.\text{ Suy ra } \pi \approx \frac{2l}{a}.\frac{n}{m}.$$

Với công thức $\pi \approx \frac{2n}{m}$ ta biết được trong câu chuyện đã kể ngài Buffon sử dụng những chiếc kim có chiều dài bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song liền kề nhau ($a=l$).



Hình 2. Hình minh họa cho việc tính toán bài toán bài toán chiếc kim của Buffon.
Nguồn: Vũ Tiến Việt (Tài liệu tham khảo [4]).

Dưới đây là kết quả thí nghiệm tung kim để tính gần đúng số π của một số nhà khoa học dưới đây (Bảng 1).

Người thí nghiệm	Số lần tung	Số lần kim đè ĐT	Giá trị xấp xỉ π
Buffon, 1777	1106	704	3,14204
Wolf, 1850	5000	3177	3,14762
Smith, 1855	3204	2030	3,15665
De Morgan, 1860	600	382	3,14136
Fox, 1864	1030	653	3,15467
Lazzerini, 1901	3408	2169	3,14246
Reina, 1925	2520	1604	3,14214

Bảng 1. Kết quả tung kim của 7 nhà khoa học.
Nguồn: S. M. Ross (Tài liệu tham khảo [6]).

Ví dụ 4. (Xem [4]. Minh họa cho việc định nghĩa xác suất bằng thống kê tần suất). Trong những năm 1989-1999 trên toàn thế giới trung bình mỗi năm có khoảng 18 triệu chuyến bay, 24 tai nạn máy bay gây chết người và 750 người chết trong các tai nạn máy bay. Cũng trong khoảng thời gian đó ở nước Pháp trung bình mỗi năm có khoảng 8,000 người chết vì tai nạn ôtô trên tổng số 60 triệu dân.

Từ các số liệu này ta có thể tính: xác suất để một người Pháp bị chết vì tai nạn ô tô trong một năm là 8,000/60,000,000=0,0133%. Xác suất để đi một chuyến bay gặp tai nạn chết người là 24/18,000,000=0,000133%, chỉ bằng 1/100 xác suất bị chết vì tai nạn ôtô trong một năm. Nếu một người đi 20 chuyến bay trong một năm thì xác suất bị chết vì tai nạn máy bay bằng khoảng 20 x 0,000133%=0,00266%, tức là chỉ bằng 1/5 xác suất bị chết vì tai nạn ôtô trong một năm.

Ví dụ 5. (Xem [4-6]. Minh họa cho việc định nghĩa xác suất bằng thống kê tần suất). Ông Gregor Mendel (1822-1884) là một tu sĩ người Austria thích nghiên cứu sinh vật. Ông trồng nhiều giống đậu khác nhau trong vườn của tu viện và ghi chép tỉ mỉ về các tính chất di truyền và lai giống của chúng. Năm 1866 G. Mendel công bố bài báo về các hiện tượng mà ông quan sát được kèm theo lý thuyết để giải thích các hiện tượng đó.

Một trong những quan sát trong đó là về màu sắc: khi lai đậu hạt vàng với đậu hạt xanh (thế hệ thứ nhất) thì các cây lai (thế hệ thứ hai) đều ra đậu hạt vàng, nhưng tiếp tục lai các cây đậu hạt vàng thế hệ thứ hai này với nhau thì đến thế hệ thứ ba xác suất ra đậu hạt xanh là 1/4. Con số 14 này là do Mendel thống kê thấy tỷ lệ đậu hạt xanh ở thế hệ thứ ba xấp xỉ bằng 1/4.

Từ đó Mendel xây dựng lý thuyết di truyền để giải thích hiện tượng này: Màu sắc của hạt đậu được xác định bởi một gen có hai phần. Thế hệ đầu tiên cây đậu hạt vàng có gen thuần chủng "YY" còn cây đậu hạt xanh có gen thuần chủng "yy" (tên gọi "Y" và "y" ở đây là tượng trưng). Khi lai nhau thì một nửa gen của cây này ghép với một nửa gen của cây kia để tạo thành gen của cây con. Các cây thế hệ thứ hai đều có gen "Yy" và màu của hạt đậu cũng là màu vàng. Đến thế hệ thứ ba là kết quả của việc lai các cây thế hệ thứ hai với nhau thì có 4 khả năng xảy ra về gen: "YY", "Yy", "yY", "yy" (các gen "Yy" và "yY" là như nhau nhưng viết như vậy nhằm phân biệt phần "Y" đến từ cây thứ nhất hay cây thứ hai trong hai cây lai với nhau). Về lý thuyết có thể coi 4 khả năng trên có xác suất xảy ra bằng nhau. Bởi vậy xác suất để cây thế hệ thứ ba có gen "yy" (ra hạt màu xanh) là 1/4.

Trong rất nhiều năm sau khi công bố, công trình của Mendel không được các nhà khoa học khác quan tâm đến, nhưng ngày nay Mendel được coi là cha tổ của di truyền học.

Ví dụ 6. (Xem [4-6]. Minh họa cho việc định nghĩa xác suất bằng thống kê tần suất.) Tần suất xuất hiện mặt T (tail, sấp=S) khi tung một đồng tiền xu (coin) nhiều lần được cho trong bảng dưới đây (Bảng 2).

Người thí nghiệm	Số lần tung	Số lần xuất hiện mặt sấp	Tần suất
Buffon	4040	2048	0,5080
Pearson	12000	6010	0,5016
Pearson	24000	12012	0,5005

Bảng 2. Kết quả tung đồng xu của 2 nhà khoa học.
Nguồn: B. V. Gnhedenko (Tài liệu tham khảo [5]).

Vậy ta có thể kết luận rằng xác suất xuất hiện mặt sấp khi tung một đồng tiền xu là 1/2. Suy ra xác suất xuất hiện mặt ngửa khi tung một đồng tiền xu cũng là 1/2.

Trước đây khi máy tính và tin học chưa phát triển, người ta phải làm thí nghiệm rất công phu để tìm giá trị ổn định của tần suất với số lần quan sát đủ lớn.

Ngày nay máy tính giúp cho việc tính toán các vấn đề Xác suất và Thống kê trở nên dễ dàng hơn, khi đã có các số liệu đúng đắn và mô hình hợp lý. Tuy nhiên, bản thân máy tính không tự biết mô hình nào là hợp lý. Đó là vấn đề của người sử dụng máy tính. Cần phải hiểu được bản chất của các khái niệm và mô hình Xác suất và Thống kê thì mới có thể dùng được chúng.

Ví dụ 7. (Xem [4]). Một chàng trai quen biết 2 cô gái (tam gọi là A và B), mức độ tình cảm như nhau. Mỗi khi muốn đến thăm một cô bạn gái nào đó, chàng trai ra bến xe bus, gặp xe đi hướng đến nhà cô A thì lên xe đến nhà cô A, nếu gặp xe đi hướng đến nhà cô B thì lên xe đến nhà cô B. Hai loại xe đó đều đặn cứ 30 phút có một chuyến, thời điểm xuất hiện hoàn toàn ngẫu nhiên trong khoảng 30 phút đó. Theo suy nghĩ bình thường thì sau một thời gian dài, số lần đến thăm 2 cô bạn gái của chàng trai phải gần như nhau. Nhưng sau 3 năm ghi chép lại, chàng trai thấy số lần đến thăm cô A nhiều gấp 2 lần số lần đến thăm cô B. Có thể giải thích việc này theo quan điểm của Xác suất thế nào?

Theo quan điểm *Xác suất Hình học* có thể giải thích như sau: coi không gian mẫu **Ω** là quảng thời gian 30 phút, có độ đo mes(**Ω**)=1. Tập hợp tất cả các thời điểm xuất hiện xe bus đi đến hướng nhà cô A trong 30 phút đó có độ đo mes(A)=2/3. Tập hợp tất cả các thời điểm xuất hiện xe bus đi đến hướng nhà cô B trong 30 phút đó có độ đo mes(B)=1/3. *Độ đo ở đây là độ đo Lebesgue mà sẽ được đề cập đến trong giáo trình về độ đo và tích phân.* Điều đó có thể lý giải cho việc số lần đến thăm cô A nhiều gấp 2 lần số lần đến thăm cô B.

Ví dụ 8. (Xem [4]. Minh họa cho việc không gian mẫu có các phần tử có khả năng xuất hiện không ngang nhau).

Tại một vùng dân cư, tỷ lệ mắc bệnh X là 1/1000. Nếu một người dân mắc bệnh X, khi đi xét nghiệm kết quả sẽ là chắc chắn dương tính (tỷ lệ 100%). Nhưng nếu một người dân không mắc bệnh X, khi đi xét nghiệm, thì do sai số của máy xét nghiệm, kết quả sẽ có thể là dương tính (tỷ lệ 5%). Chọn ngẫu nhiên một người dân đi xét nghiệm, kết quả là dương tính. Hỏi khả năng người đó mắc bệnh X là bao nghiêu?

Bài toán này được ba nhà toán học Cassels, Shoenberger, Crayboys đố 60 bác sỹ và sinh viên của đại học y khoa Harvard. Câu trả lời hầu hết là 95% (vì họ lấy 100% - 5% = 95%).

Nhưng thực ra câu trả lời là xấp xỉ 2%. Cụ thể lời giải như sau:

Đặt A là biến cố người được chọn qua xét nghiệm bị dương tính, đặt B1 là biến cố người được chọn không mắc bệnh X và B2 là biến cố người được chọn mắc bệnh X.

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có

P(A) = P(B1)P(A|B1) + P(B2)P(A|B2) = 99,9%.5% + 0,1%.100% = 509,5%

Xác suất cần tìm theo công thức Bayes là

P(B2|A) = P(B2)P(A|B2) / P(A) = 0,1%.100% / 509,5% = 10/509,5<10/500=2%

Có người đã thử so sánh toán học với âm nhạc và nói rằng Đại số-Tôpô-Hình học giống như nhạc giao hưởng và ôpêra, còn Xác suất và Thống kê thì như là vũ balê.

4. Kết luận

Việc nghiên cứu đã được thực hiện và thử nghiệm trong nhiều năm giảng dạy Xác suất và Thống kê cho nhiều lớp học của nhiều trường, như: i) Học viện An ninh Nhân dân; ii) Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội; iii) Trường Đại học Kinh tế, Đại học Quốc gia Hà Nội; iv) Trường Đại học Khoa học Xã hội và Nhân văn, Đại học Quốc gia Hà Nội; v) Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Thành phố Hồ Chí Minh; vi) Khoa Địa lý, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội; vii) Trường Đại học Luật, Đại học Quốc gia Hà Nội. Học sinh và sinh viên tỏ ra hứng thú và hiểu sâu hơn về Xác suất và Thống kê.

Tài liệu tham khảo

[1] D. D. Thai, Kite Math Textbook, Hanoi National University of Education Publishing House, 2021 (in Vietnamese).

[2] H. H. Khoai, Math Textbook Series Connecting Knowledge to Life, Hanoi Education Publishing House, 2021 (in Vietnamese).

[3] D. H. Thang, Introduction to Probability Theory and Applications, Education Publishing House 2015 (in Vietnamese).

[4] V. T. Viet, Textbook of Probability Statistics and Random Process, Hanoi National University Publishing House, 2020 (in Vietnamese).

[5] B. V. Gnhedenko, Textbook of the Theory of Probability, 6th Printing, Nayka Publishing House, Moscow, 1988 (in Russian).

[6] S. M. Ross, A Firrst Course in Probability, 8th Printing, Prentice Hall, New Jersey, 2010.