ESPACES $[W_2^{(m)}(\Omega)]^M$ ET COERCIVITÉ DES FORMES SESQUILINÉAIRES ELLIPTIQUES DANS EUX

Vu Van Khuong

Ecole Supérieure de transports et de communication de Ha noi

Abstract. Le journal a donn les dfinitions de espaces de sobolev et leurs proprits. Spciallement, le journal a tudi les espaces de sobolev de la forme $[W_2^{(s)}(\Omega)]^M$, u s-entier et non-entier. En suite, le journal a tudi la coercivit des formes sesquilinaires dans le demi-espace "dform".

1. Introduction

On considère M^2 opérateurs diférientiels elliptiques de la forme

$$A^{rq} = \sum_{|i|,|j|\le k} (-1)^{|i|} D^i\left(a_{ij}^{rq} D^j\right), \qquad r,q = \overline{1,M} \tag{1.1}$$

on coordonne à l'opérateur $A = \left(A^{rq}\right)_{M\times M}$ une forme sesquilinéaire, définie sur $\left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M \times \left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$:

$$A(v,u) = \int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|\le k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx. \tag{1.2}$$

Soit V un sous-espace fermé de $\left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$. On étudie le probléme de la coercivité de la forme (1.1) pour l'espace V: on cherche $\lambda \ge 0$ de sorte que

$$|A(v,v)| \ge c|v|^2_{\left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M} - \lambda c|v|_{[L_2(\Omega)]^M}, \quad \forall v \in V, c > 0. \tag{1.3}$$

L'inégalité (1.3) est une condition suffisante pour que les problémes aux limites soient résolubles. L'etude des conditions algébriques entrainantes (1.2) a été faite par plusieurs auteurs (cf. Garding [8], L. C. Evans [3], N. Aronszajn [2],...). La solution du probléme aux limites à conditions aux limites hômogène se trouve dans l'espace mentioné V.

Pour étudier le problème sur la régularité de la solution ou le problème aux limites "sans supposer l'intégrale de Dirichlet finite" on peut introduire la notion de la coercivité d'une forme sesquilinéaire, soit $B(u,v)$, sur $H_1 \times H_2$, H_1, H_2 étant deux espaces de Hilbert, en exigeant

$$(a) \quad \sup_{|v|_{H_1}\le 1} |B(v,u)| \ge c_1|u|_{H_2} \qquad\qquad (b) \quad \sup_{|u|_{H_2}\le 1} |B(v,u)| \ge c_2|v|_{H_1} \tag{1.4}$$

Dans cet article, on étudiera le problème (1.4) pour $H_1 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$, $H_2 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$ avec $|\theta| < \dfrac{1}{2}$.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

On démontre au travail présente la validité de (1.4) pour

$$B(v,u) = \int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|\le k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx + \lambda \int_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx,$$

où les coefficients a_{ij}^{rq} sont constants, $\lambda > 0$, $|\theta| < \dfrac{1}{2}$ et assez petit l'opérateur A fortement elliptique, si a_{ij}^{rq} sont réels on a le résultat pour tous $|\theta| < \dfrac{1}{2}$. Puis, sous les hypothèses mentionnées, on déduit de (1.4) que $A + \lambda$ un isomorphizm de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$ sur $\left(\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M\right)'$ (où$\left(\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M\right)'$ est le dual du $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$).

2. Les espces $\left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$.

Comme l'habitude, on a, pour $k \ge 0$, entier:

$$|u|_{[W_p^{(k)}(\Omega)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(\int_\Omega \sum_{|i|\le k} |D^i u^r|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$(v,u)_{[W_2^{(k)}(\Omega)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \int_\Omega \sum_{|i|\le k} D_i v^r \overline{D^i u^r} dx$$

on tire de l'égalité de Parceval pour $v, u \in \left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$.

$$(v,u)_{[W_2^{(k)}(E_N)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^N \int_{E_N} \widehat{v^r}\overline{\widehat{u^r}} \sum_{|i|\le k} \xi^{2i} d\xi,$$

où $\xi^i = \xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\dots\xi_N^{i_N}$. On a évidemmént pour k entier

$$c_1|v|_{[W_2^{(k)}(E_N)]^M} \le \sum_{r=1}^{M} \Big(\int_{E_N} |\widehat{v^r}|^2 \big(1+|\xi|^2\big)^k d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \le c_2 |v|_{[W_2^{(k)}(E_N)]^M}. \tag{2.1}$$

Soit maintenant $m \ge 0$.
$\left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M \subset \left[L_2(E_N)\right]^M$, de sorte que

$$|v|_{[W_2^{(m)}(E_N)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(\int_{E_N} |\widehat{v^r}|^2 \big(1+|\xi|^2\big)^m d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \tag{2.2}$$

on obtient ainsi un espace de Hilbert à produit scalaire:

$$(v,u)_{[W_2^{(k)}(E_N)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \int_{E_N} \widehat{v^r}\overline{\widehat{u^r}} \big(1+|\xi|^2\big)^m d\xi.$$

Soit maintenant $m < 0$. On désigne par $\left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$ le dual du $\left[W_2^{(-m)}(E_N)\right]^M$. Soit $\Omega \subset E_N$, $0 \leq m < 1$. On désigne par $\left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$ l'espace des restrictions sur Ω des vectorielles fonctions de $\left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$.

On désigne par $\left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M \subset \left[W_2^{([m])}(\Omega)\right]^M$ le sous-espace pour lequel $D^i u \in \left[W_2^{(m-[m])}(\Omega)\right]^M$, $|i| = [m]$. On a alors:

$$|u|_{[W_2^{(m)}(\Omega)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(|u^r|^2_{[W_2^{([m])}(\Omega)]^M} + \sum_{|i|=[m]} \left|D^i u^r\right|^2_{[W_2^{(m-[m])}(\Omega)]^M} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Soit $0 < m < 1$. On introduit l'espace $[.W_2^{(m)}(\Omega)]^M$ des vectorielles fonctions de $\left[L_2(\Omega)\right]^M$ pour lesquelles

$$|u|_{[.W_2^{(m)}(\Omega)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(|u^r|^2_{L_2(E_N)} + \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|u^r(x) - u^r(y)|^2}{|x-y|^{N+2m}} dxdy \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \tag{2.4}$$

Si $m \geq 0$, non entier, $u \in \left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$ si $D^i u \in \left[.W_2^{(m-[m])}(\Omega)\right]^M$, $|i| = [m]$.

$$|u|_{[.W_2^{(m)}(\Omega)]^M} = \Big(|u|^2_{[W_2^{([m])}(\Omega)]^M} + \sum_{|i|=[m]} \left|D^i u\right|^2_{[.W_2^{(m-[m])}(\Omega)]^M} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

$[..W_2^{(m)}(E_N)]^M$, $0 < m < 1$, l'espace des vectorielles fonctions de $\left[L_2(E_N)\right]^M$, pour lesquelles

$$|u|_{[..W_2^{(m)}(E_N)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(|u^r|^2_{[L_2(E_N)]^M} + \\ + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{E_N} \frac{|u^r(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_N) - u^r(x)|^2}{t^{1+2m}} dtdx \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \tag{2.6}$$

Si $m \geq 0$, non entier,

$$|u|_{[..W_2^{(m)}(E_N)]^M} = \sum_{r=1}^{M} \Big(|u^r|^2_{[W_2^{([m])}(E_N)]^M} + \sum_{|i|=[m]} \left|D^i u^r\right|^2_{[..W_2^{(m-[m])}(\Omega)]^M} \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \tag{2.7}$$

on dimontre, saus difficulté, en utilisant la transformation de Fourier au cas de $\Omega = E_N$, l'équivalence des normes $|\ |_{[W_2^{(m)}(E_N)]^M}$ et $|\ |_{[..W_2^{(m)}(E_N)]^M}$, d'où, il s'ensuit l'équivalence des normes $|\ |_.$, $|\ |_{..}$.

Résumons:

Lemme 2.1. Soit $\Omega = E_N$. Alors les normes (2.2), (2.5), (2.7) sont équivalentes.

Soit $\Omega = E_N^+$, le demi-espace $x_N > 0$. on obtient:

Lemme 2.2. Soit $\Omega = E_N^+$. Alors les normes (2.2), (2.5), (2.7) sont équivalentes.

Lemme 2.3. Soit $\Omega = E_N^+$, $0 \leq m < \dfrac{1}{2}$. Soit P le prolongement par zéro des vectorielles fonctions de $[W_2^{(m)}(E_N^+)]^M$ sur E_N.

Alors, P est une application linéaire et continue de $[W_2^{(m)}(E_N^+)]^M$ dans $[W_2^{(m)}(E_N)]^M$ et on a $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(E_N^+)\right]^M = [W_2^{(m)}(E_N^+)]^M$

Lemme 2.4. Soit $\Omega = E_N^+$, $\dfrac{1}{2} < m \leq 1$. Soit P le prolongement par zéro des vectorielles fonctions de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(E_N^+)\right]^M$ sur E_N.

Alors, P est une application linéaire et continue de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(E_N^+)\right]^M$ dans $\left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$.
On considère maintenant le cas du demi-espace "déformé" et les normes (2.3), (2.5).

Lemme 2.5. Soit $a(x')$ une fonction Lipschitzienne, définie dans E_{N-1}, nulle au voisinage de l'infini.
Soit $\Omega = E\{x | x = (x', x_N), x_N > a(x')\}$. Alors, les normes (2.3), (2.5) équivalent.

Lemme 2.6. Soit Ω du lemme précédent. Alors le lemme 2.3 a lieu.

Lemme 2.7. Soit Ω du lemme précédent. Alors le lemme 2.4 reste en vigueur.

Lemme 2.8. Soit $0 \leq m < n$. Alors à chaque $\varepsilon > 0$ on peut coodonner $\lambda(\varepsilon) > 0$ de sorte que pour $u \in \left[W_2^{(n)}(E_N)\right]^M$.

$$|u|_{[W_2^{(m)}(E_N)]^M} \leq \varepsilon |u|_{[W_2^{(n)}(E_N)]^M} + \lambda(\varepsilon)|u|_{[L_2(E_N)]^M} \tag{2.8}$$

Lemme 2.9. Soit Ω un domaine à frontière Lipschitzienne. Alors les normes (2.3), (2.5) équivalent.

Lemme 2.10. Soit Ω un domaine à frontière Lipschitzienne. Alors les lemmes 2.3 et 2.4 ont lieu.

Lemme 2.11. Soit Ω un domaine à frontière Lipschitzienne ou un demi-espace "déformé". Soit $m \geq 0$, $m - [m] \neq \dfrac{1}{2}$. Soit P l'opérateur du prolongement par zéro des vectorielles fonctions de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$ sur E_N. Alors, P est une application linéaire et continue de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$ dans $\left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$

Lemme 2.12. Soit $0 \leq m \leq n$, Ω un domaine à frontière Lipschitzienne. Alors $\left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M \subset \left[W_2^{(n)}(\Omega)\right]^M$ algébriquement et topologiquement.

Lemme 2.13. Sous les hypothèses du lemme 2.11, avec $0 \leq m \leq n$, $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\lambda(\varepsilon) > 0$ de sorte que pour $u \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(n)}(\Omega)\right]^M$

$$|u|_{[W_2^{(m)}(\Omega)]^M} \leq c|u|_{[W_2^{(n)}(\Omega)]^M} + \lambda(\varepsilon)|u|_{[L_2(\Omega)]^M} \tag{2.9}$$

Finissons la deuxième partie de nortre article par:

Lemme 2.14. Soit Ω un domaine à frontière Lipschitzienne. $m \geq 0$. Alors la restriction de $\left[\mathcal{D}(E_N)\right]^M$ sur Ω est dense dans $\left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$.

3. La coecivité des formes dans le demi-espace " déformé"

Soit Ω un demi-espace " déformé" $\Omega = E\{x | x = (x', x_N),\ x_N > a(x')\}$, k un entier > 0, λ un nombre. On désigne par

$$B_\lambda(v,u) = \sum_{r=1}^{M} \int_\Omega \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^r} dx + \lambda \int_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx \tag{3.1}$$

une forme sesquilinéaire dans $\left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M \times \left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$, à coefficients constants et fortement elliptique:

$$\mathrm{Re} \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}} \xi^{i+j} \eta^r \overline{\eta^q} \geq \varepsilon \sum_{r=1}^{M} |\eta^r|^2 |\xi|^{2k}, \tag{3.2}$$

$\varepsilon > 0$, $\forall\ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in E_N$, $\eta = (\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^M)$, $\xi^i = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \ldots \xi_N^{i_N}$, $|i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$.

Lemme 3.1. La forme (3.1), définie sur $\left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^M \times \left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^M$, peut être prolongée pour $|\theta| < k$ par continuité en une forme sesquilinéaire sur $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M \times \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$.

On désigne par R_α une transformation de $\left[\mathcal{D}(E_N)\right]^M$ dans $\left[L_2(E_N)\right]^M$, définie par:

$$R_\alpha(\varphi)(\xi) = \Gamma(\alpha+1)\widehat{\varphi}(\xi) \int_{\overset{\circ}{K}} \left[1 + I(\xi,\sigma)\right]^{-\alpha} \nu(\sigma) dS \tag{3.3}$$

où $I^2 = -1$, et K la boule unité, centrée à l'origine, $\nu(\sigma)$ une fonction définie sur la surface $\overset{\circ}{K}$ de la boule, $\nu(\sigma) \geq 0$, indéfiniment différentiable avec $\int_{\overset{\circ}{K}} \nu(\sigma) dS = 1$. (ξ, σ) désigne le produit scalaire dans E_N.

Lemme 3.2 Soit $m \geq 0$, $\alpha + m \geq 0$, $|\alpha| < 1$. Alors la transformation R_α peut être prolongée par continuité en une transformation linéaire et bornée de $\left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$ sur $\left[W_2^{(m+\alpha)}(E_N)\right]^M$.

Théorème 1. Soient Ω un demi-espace " déformé", $B_\lambda(v,u)$ la forme (3.1) jouissant de (3.2), (3.3).

Alors pour $|\theta| < \dfrac{1}{2}$ et θ assez petit, on a pour $\lambda \geq 2$:

$$\mathrm{Re} B_\lambda(v,u) \geq c_1(\theta) |u|^2_{[W_2^{(m+\theta)}(\Omega)]^M} + c_2\sqrt{\lambda - 1}.|u|_{[L_2(\Omega)]^M}. \tag{3.4}$$

pour $\lambda \geq 1$:

$$\mathrm{Re}B_\lambda(v,u) \geq c_3(\theta)|u|^2_{[W_2^{(m+\theta)}(\Omega)]^M} \tag{3.5}$$

où $u \in \big[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\big]^M$, $v \in \big[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\big]^M$, $v = R_{-2\theta}(u)$, R est une transformation linéaire et continue de $\big[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\big]^M$ dans $\big[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\big]^M$; Si les coefficents a_{ij}^{rq} sont réels, on a l'assertion pour tous $|\theta| < \dfrac{1}{2}$.

Démonstration: Nous essquissons de demonstration: on modifie l'identité de S.L. Sobolev (cf. [8]), on a

$$\varphi(x) = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\big(e^{-t}\varphi(x+t\sigma)\big)dt.$$

en posant $x + t\sigma = y$, on obtient:

$$\varphi(x) = \int_{E_N} \Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial\varphi(y)}{\partial x_i}\frac{x_i - y_i}{|x-y|^N}.e^{-|x-y|} + \varphi(y).\frac{1}{|x-y|^{N-1}}.e^{-|x-y|}\Big)\times$$
$$\times\, \nu\Big(\frac{x-y}{|x-y|}\Big)dy, \quad \forall\varphi \in \big[\mathcal{D}(\Omega)\big]^M.$$

pour $-1 < \alpha < +\infty$ en posant

$$R_\alpha(\varphi) = \int_{E_N}\Big(\sum_{i=1}^N \frac{\partial\varphi(y)}{\partial x_i}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^{N-\alpha}} + \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{N-1-\alpha}}\Big).e^{-|x-y|}\nu\Big(\frac{x-y}{|x-y|}\Big)dy.$$

Soit $u \in \big[\mathcal{D}(\Omega)\big]^M$, $v = R_{-2\theta}(u)$. on a $v \in W_2^{(m)}(E_N)$ pour chaque $m \geq 0$, il s'ensuit que $v \in \big[\overset{\circ}{W}{}_2^{(m)}(\Omega)\big]^M$ et on a

$$\mathrm{Re}B_\lambda(v,u) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^N \mathrm{Re}\int_{E_N}\sum_{q,r=1}^M \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}}\xi^{i+j}v^r(\xi)\overline{u^r(\xi)}d\xi + \mathrm{Re}\lambda\int_{E_N}\sum_{r=1}^M v^r(\xi)\overline{u^r(\xi)}d\xi \geq$$
$$c_3(2\theta)\int_{E_N}\sum_{r=1}^M \big(\lambda + |\xi|^{2k}\big)\big(1+|\xi|^2\big)^\theta\big|u^r(\xi)\big|^2 d\xi$$

par un calcul élémentaire, on obtient pour $\lambda \geq 2$

$$\big(\lambda + |\xi|^{2k}\big)\big(1+|\xi|^2\big)^\theta \geq c_4\big(1+|\xi|^2\big)^k + c_5\sqrt{\lambda - 1}$$

pour $\lambda \geq 1$:

$$\big(\lambda + |\xi|^{2k}\big)\big(1+|\xi|^2\big)^\theta \geq c_6\big(1+|\xi|^2\big)^{k+\theta}$$

Si les coefficients a_{ij}^{rq} sont réels on obtient l'assertion du théorème.

References

1. S. Agmons, The coerciveness problèm for integro-differential forms, *J. Anal. Math.*, **6**(1958), 183-223.
2. N. ARonszajn, *Coercive integro-differential quadratic forms*, University of Kansas, 1964, 94-106.
3. L.C. Evans, Partial Différential Equations, *American Math. Society*, 1988,
4. R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, 1975.
5. J. Necas, Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationelle, *Ann. Sup. pisa*, **16**(1962).
6. J. Necas, Sur la coercivité des formes sesqui-linéaires elliptiques, *Revue Roumaine de Math.*, tome XI, **N°1**(1964).
7. S. Mizochata, *Théorie des équations aux dérivées partielles*, Editions Mir, Moscow, 1980.
8. L. Garding, Dirichlet's problem for linear elliptic partial différential eqution, *Math. Scand*, 1953, 55-72.
9. S.L. Sobolev, *Quelques applications de l'analyse fonctionnelle daus la physique mathématique*, Leningrad, 1950.