COERCIVITÉ DES FORMES SESQUILINÉAIRES ELLIPTIQUES ET PROBLÈME DE DIRICHLET

Vu Van Khuong

Ecole Supérieure de transports et de communication de Ha noi

Résumé. Dans cet articla on a étudiéla coercivité des formes sesquilinéaires elliptiques lans les espaces de Sobolev de la forme $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\times \overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$ (c'est une condition suffisante pour que les problémes aux limités soient résolubles), où Ω un domaine $\subset E_N$ ıfrontière lipschitzienne. En suite, on a étudiéle probléme de Dirichlet $Au = f$ dans Ω

$$u = u+0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}, \cdots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \frac{\partial u_0}{\partial \nu^{k-1}}$$

sur $\overset{\circ}{\Omega}$

Introduction

Pour étudier le problème sur la régularité de la solution ou lé problème aux limites "sans supposer l'intégrale de Dirichlet finie" on peut introduire la notion de la coercivité d'une forme sesquilinéaire, soit $B(v,u)$ sur $H_1 \times H_2$, H_1, H_2 étant deux espaces de Hilbert, en éxigeant

$$a) \quad \sup_{|v|_{H_1}\le 1} |B(v,u)| \ge c_1 |u|_{H_2} \qquad (b) \quad \sup_{|u|_{H_2}\le 1} |B(v,u)| \ge c_2 |v|_{H_1} \qquad (1)$$

Dans cet article, on étudiera le problème (1) pour $H_1 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$, $H_2 = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$, avec $|\theta| < \frac{1}{2}$, où $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$, resp $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$ est l'adhérence de $\left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^M$ (de l'espace des vertorielles fonctions indéfiniment différentialbles à support compact dans Ω) dans la topologie induite par $\left[W_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$, resp. $\left[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$.

Pour Ω on prendra un domaine borné à frontière Lipschitzienne.

On considère la forme sesquilinéaire

$$B(v,u) = \int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|\le k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx + \lambda \int_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx,$$

à coefficients assez réguliers, l' opérateur A est supposé uniformément elliptique on a (1) pour $|\theta| < \frac{1}{2}$, assez pêtit, λ assez grand. On étudiera le problème de Dirichlet dans Ω à frontière Lipschitzienne.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. La coercivité des formes aux domaines à frontières Lipschitzienes

Soit Ω un domaine borné à frontière Lipschitzienne, k un nombre entier > 0 et

$$B_\lambda(v,u) = \int\limits_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|\leq k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx + \lambda \int\limits_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx, \tag{1.1}$$

une forme sesquilinéaire dans $\left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M \times \left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$, à coefficients mesurables, bornés et uniformément fortement elliptique:

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in E_N \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}} \xi^{i+j} \eta^r \overline{\eta^q} \geq \varepsilon \sum_{r=1}^{M} |\eta^r|^2 |\xi|^{2k}, \tag{1.2}$$

où $i = (i_1, i_2, \dots, i_N)$, $\xi^i = \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \dots \xi_N^{i_N}$, $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_N$,
i_j - nombres entrous, $i_j \geq 0$, $j = \overline{1,N}$,
presque partout, $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^M$, des nombres complexes arbitraires. On désigne par $\left[\mathcal{D}_\Omega(E_N)\right]^M$ l' espace des réstrictions des vectorielles fonctions de $\left[\mathcal{D}(E_N)\right]^M$ sur Ω. Considérons sur $\left[\mathcal{D}_\Omega(E_N)\right]^M \times \left[\mathcal{D}_\Omega(E_N)\right]^M$ une forme sesquilinéaires:

$$\int\limits_\Omega \overline{a_{rq}} \frac{\partial f^r}{\partial x_i} \overline{g^q} dx \tag{1.3}$$

Lemme 1.1. *Soit $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$. Alors la forme (1.3) peut être prolongée par continuité en une forme sesquilinéaire sur $\left[W_2^{(1-\theta)}(\Omega)\right]^M \times \left[W_2^{(\theta)}(\Omega)\right]^M$ si a^{rq} sont des fonctions $\mathcal{X}$-Höldériennes dans $\overline{\Omega}$ avec $\mathcal{X} > \theta$.*

En effet, on désigne par $\left[\mathcal{C}(\overline{\Omega})\right]^M$ l'ensemble des vectorielles fonctions continues avec toutes leurs dérivées sur la fermeture de Ω.

Soit maintenant $|\theta| < \frac{1}{2}$ et les coefficients de (1.1) sont $\mathcal{X}$-Höldériennes avec $\mathcal{X} > |\theta|$ pour

$$|i| = k,\ |j| \leq k \text{ si } 0 < \theta < \frac{1}{2} \text{ et pour } |i| \leq k, |j| = k \text{ si } -\frac{1}{2} < \theta < 0 \tag{1.4}$$

On définit la forme (1.1) sur $\left[W_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M \times \left[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$ à l'aide du lemme 1.1 en la définissant d'abord sur $\left[\mathcal{D}_\Omega(E_N)\right]^M \times \left[\mathcal{D}_\Omega(E_N)\right]^M$.

Théoreme 1. *Soit Ω un domaine à frontière Lipschitzienne. Soit $|\theta| < \frac{1}{2}$. Alors la forme (1.1), satisfaisant (1.2), (1.4) est sesquilinéaire sur $\left[W_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M \times \left[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$. Si $|\theta|$ est assez pêtit et λ assez grand, la forme est coercive sur $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M \times \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$; Si les coefficients a_{ij}^{rq} pour $|i| = |j| = k$ sont réels, la forme (1.1) est coercive pour tous $|\theta| < \frac{1}{2}$ et λ assez grand.*

Démonstration (En bref). On désigne par

$$B'_z(v,u) = \int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}}(z) D^i v^r \overline{D^j u^q} dx + \lambda \int_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx.$$

par

$$B'(v,u) = \int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx + \lambda \int_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx.$$

Considérons alors le cas du $|\theta| \neq 0$. Soit $u \in \left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^M$ on définit $Q(u) = w$, $w \in \left[L_2(E_N)\right]^M$, en posant $\widehat{u}(\xi) = \widehat{u}(\xi) I.(1+|\xi|^2)^\theta$. On a évidemment $w \in \left[W_2^{(m)}(E_N)\right]^M$ pour $m \geq 0$. pour $z \in \overline{\Omega}$, $\lambda \geq 2$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re} \int_{E_N} \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}}(z) D^i w^r \overline{D^i u^q} dx + \mathrm{Re}\lambda \int_{E_N} \sum_{r=1}^{M} w^r \overline{u^r} dx \geq \\ &\geq c_1 |u|^2_{[.W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} + c_1 \sqrt{\lambda - 1} |u|^2_{[L_2(\Omega)]^M} \end{aligned}$$

où c_1 ne dépends pas de z. On a

$$|w|_{[.W_2^{(k-\theta)}(\Omega)]^M} \leq c_2 |u|_{[.W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M}.$$

Désignons le demi-espace par Ω_r. (Définition de Ω_r on peut voire dans [8]). D'après le théorème 1 de [9], il existe des transformations linéaires et continues de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega_r)\right]^M$ dans $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega_r)\right]^M$, soit Q_r, $r = \overline{1, M_1}$, de sorte que pour

$$\begin{aligned} &w = Q_r(u), \\ &|Q_r(u)|_{[.W_2^{(k-\theta)}(\Omega_r)]^M} \leq c_3 |u|_{[.W_2^{(k+\theta)}(\Omega_r)]^M}. \\ &\mathrm{Re} \int_{\Omega_r} \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j|=k} \overline{a_{ij}^{rq}}(z) D^i w^r \overline{D^j u^q} dx + \mathrm{Re}\,\lambda \int_{\Omega_r} \sum_{r=1}^{M} w^r \overline{u^r} dx \geq \\ &\geq c_4 |u|^2_{[.W_2^{(k+\theta)}(\Omega_r)]^M} + c_4 \sqrt{\lambda - 1} |u|^2_{[L_2(\Omega_r)]^M}. \end{aligned}$$

on a alors l'assertion du théorème pour λ assez grand.

2. Problème de Dirichlet.

On considére dans Ω (un domaine à frontière Lipschitzienne) la forme (1.1), jouissant de (1.2) et (1.4). Soient pour $|\theta| < \frac{1}{2}$, $u_0 \in \left[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$, $f \in \left[W_2^{(\theta-k)}(\Omega)\right]^M$. On dit d'une vectorielle fonction de $\left[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$, soit u, qu'elle résout le problème de Dirichlet: $Au = f$ dans Ω où A est l'opérateur:

$$A^{rq} = \sum_{|i|,|j|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij}^{rq} D^j), \qquad r,q = \overline{1,M}; \tag{2.1}$$

$u = u_0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu}, \dots, \dfrac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = \dfrac{\partial^{k-1} u_0}{\partial \nu^{k-1}}$ sur $\overset{\circ}{\Omega}$ au sens généralisé ($\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ désignant la dérivée dans la direction de la normale extérieure), si pour chaque $\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^M$

$$A(\varphi, u) = \overline{f}(\varphi); \quad (\overline{f}(\varphi) = \overline{f(\overline{\varphi})}) \tag{2.2}$$

et si

$$u - u_0 \in [\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M. \tag{2.3}$$

pour simplifier, on supposera dans cette partie que la forme $A(v, u)$ est $[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)]^M$-elliptique, à savoir:

$$\forall\, v \in [\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)]^M \Rightarrow |A(v,v)| \geq c|v|^2_{[W_2^{(k)}(\Omega)]^M}. \tag{2.4}$$

Lemme 2.1. *Soit la forme sesquilinéaire $B(v,u)$ sur $H_1 \times H_2$ deux espaces de Hilbert, coercive. Alors chaque fonctionnelle f sur H_1 peut être représentée d'une manière unique sous la forme $B(v,u) = f(v)$ et on a*

$$|u|_{H_2} \leq c|f|. \tag{2.5}$$

En effet, en désignant par $(\ ,\ )_{H_1}$ le produit scalaire dans H_1, on a, par le théorème de Riesz: $B(v,u) = (v, Z(u))_{H_1}$, Z étant une transformation linéaire et continue de H_2 dans H_1. On a par

$$\sup_{|v|_{H_1} \leq 1} |B(v,u)| = |Z(u)|_{H_1} \geq c_1 |u|_{H_2}, \tag{2.6}$$

d'où Z est une transformation simple, et $Z(H_2)$ est formé dans H_1. D'autre part, en vertu de l'inégalité

$$\sup_{|u|_{H_2} \leq 1} |B(v,u)| \geq c_2 |v|_{H_1}, \tag{2.7}$$

on a $Z(H_2) = H_1$, d'où l'assertion. On a maintenant

Théore me 2. *Soit Ω un domaine borné à frontière Lipschitzienne, et que l'opérateur A avec sa forme sésquilinéaire $A(v,u)$ satisfasse les hypothèses* (2.4), (1.1), (1.2), (1.4).

Soit $|\theta| < \dfrac{1}{2}$, un nombre assez petit au cas géneral et $|\theta| < \dfrac{1}{2}$ seulement si les coefficients a_{ij}^{rq} pour $|i| = |j| = k$ sont réels. Alors pour chaque $f \in [W_2^{(\theta-k)}(\Omega)]^M$, $u_0 \in [W_2^{(\theta+k)}(\Omega)]^M$, il existe précisément une solution du problème de Dirichlet, soit u, et on a

$$|u|_{[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} \leq c\Big[|f|^2_{[W_2^{(\theta-k)}(\Omega)]^M} + |u_0|_{[W_2^{(\theta+k)}(\Omega)]^M}\Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Démonstration. Naturellement, on considère θ, pour lesquels théothème 1 a lieu. Soit $\theta \geq 0$. On a dans ce cas $f \in [W_2^{(\theta-k)}(\Omega)]^M \subset [W_2^{(-k)}(\Omega)]^M$, $u_0 \in [W_2^{(\theta+k)}(\Omega)]^M \subset [W_2^{(k)}(\Omega)]^M$, les inclusions étant algébriques et topologiques. En posant $\overline{F}(v) = \overline{f}(v) -$

$A(v, u_0)$, on obtient, tenant compte du lemme 2.1 et de (2.4), l'assertion du théothème pour $\theta = 0$ et l'inégalité

$$|u|_{[W_2^{(k)}(\Omega)]^M} \leq c_1 \left[|f|^2_{[W_2^{(-k)}(\Omega)]^M} + |u_0|_{[W_2^{(k)}(\Omega)]^M} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

On désigne de nouveau

$$B_\lambda(v, u) = \int\limits_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j| \leq k} \overline{a_{ij}^{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx + \lambda \int\limits_\Omega \sum_{r=1}^{M} v^r \overline{u^r} dx.$$

Soit λ si grand pour que le théorème 1 ait lieu. On prend λ si grand pour que le théorème 1 ait lieu aussi pour $\theta = 0$. On a pour $v \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$:

$$\begin{aligned} B_\lambda(v, u) &= \overline{f}(v) + \lambda(v, u); \\ u - u_0 &\in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)\right]^M. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Soit maintenant $u^* \in \left[W_2^{(\theta+k)}(\Omega)\right]^M$ telle que

$$\begin{aligned} \varphi \in \left[\mathcal{D}(\Omega)\right]^M \ &\Rightarrow \ B_\lambda(\varphi, u^*) = \overline{f}(\varphi) + \lambda(\varphi, u) \\ u^* - u_0 &\in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M \end{aligned} \tag{2.11}$$

il existe une seule solution de ce problème et on a

$$|u^*|_{[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} \leq c_2 \left[|f|^2_{[W_2^{(\theta-k)}(\Omega)]^M} + |u_0|_{[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.12}$$

En effet, d'après le lemme 2.1, il existe précisément un élément de $\left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$, soit w, de sorte que pour $v \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k-\theta)}(\Omega)\right]^M$, on a

$$B_\lambda(v, w) = \overline{f}(v) - \lambda(v, u) - B_\lambda(v, u_0).$$

Il vaut

$$|w|_{[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} \leq c_3 \left[|f|^2_{[W_2^{(\theta-k)}(\Omega)]^M} + |u|^2_{[L_2(\Omega)]^M} + |u_0|^2_{[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

Évidement, l'élément $w + u_0$ est une solution du problème. D'après (2.6), elle est unique il s'ensuit de (2.11) que u^* satisfait à (2.10); u étant unique, on a $u = u^*$ et l'inégalité (2.8). La solution du problème est unique; cela découle de l'unicité de la solution pour $\theta = 0$. Soit maintenant $\theta < 0$. On prend de nouveau λ si grand que le théorème 1 vaut pour θ et 0. On trouve comme au premier cas une solution unique du problème

$$\begin{aligned} (A + \lambda)u &= f \text{ dans } \Omega; \\ u - u_0 &\in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M. \end{aligned}$$

et on a

$$|u|_{[W_2^{(k+\theta)}(\Omega)]^M} \le c_4 \left[|f|^2_{[W_2^{(\theta-k)}(\Omega)]^M} + |u_0|^2_{[W_2^{(\theta+k)}(\Omega)]^M} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.14}$$

Soit maintenant $h \in \left[W_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$ la solution du problème $Ah = \lambda u$ dans Ω, $h \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$; il existe une seule solution de ce problème et on a

$$|h|_{[W_2^{(k)}(\Omega)]^M} \le c_5 |u|_{[L_2(\Omega)]^M}. \tag{2.15}$$

Évidément, la vectorielle fonction $u + h$ résout notre problème et on a, en vertu de (2.14), (2.15), l'inégalité (2.9). La solution u est unique. En effet, soit $Au = 0$ dans Ω, $u \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$. On a $(A + \lambda)u = \lambda u$ dans Ω; la solution du problème $(A + \lambda)u = f$ dans Ω, $f \in \left[L_2(\Omega)\right]^M$, $u \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k+\theta)}(\Omega)\right]^M$, étant unique, on a $u \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$, parce qu'il existe une seule solution de ce problème pour $\theta = 0$. Ayant $Au = 0$ dans Ω et $u \in \left[\overset{\circ}{W}{}_2^{(k)}(\Omega)\right]^M$ on obtient $u = 0$, la solution du dernièr problème étant unique, d'ou le théorème.

Bibliographie

1. S. Agmons, The coerciveness problèm for integro-differential forms, *J. Anal. Math.*, **6**(1958), 183-223.
2. N. Aronszajn, *On coercive integro-differential quadratic forms,* University of Kansas, 1964, 94-106.
3. L.C. Evans, Partial Différential Equations, *American Math. Society,* 1988,
4. R.A. Adams, *Sobolev spaces,* Academic Press, 1975.
5. S. Mizochata, *Théorie des éqution aux dérivées partielles,* Editions Mir, Moscow, 1980.
6. L. Garding Dirichlet's problèm for linear elliptic partial différential eqution, *Math. Scand,* 1953, 55-72.
7. J. Necas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationelle, *Ann. Sup. pisa* 16, 1962.
8. J. Necas. Sur la coercivité des formes sesqui-linéaires elliptiques, *Revue Roumaine de Math.,* tome XI, N^o**1**(1964).
9. Vu Van Khuong, Espaces $\left[W_2^{(m)}(\Omega)\right]^M$ et coercivité des formes sesquilinéaires elliptiques dans eux, *J. Science, VNU*, T.XIX, N^0**4**(2003).