CÔNG THỨC TAYLOR ĐỐI VỚI TOÁN TỬ SAI PHÂN CÓ TRỌNG VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Nguyễn Vũ Lương
Khoa Toán - Cơ - Tin học, ĐHTH Hà Nội

1. Giả sử $\tilde{X}$ là một không gian vectơ trên trường vô hướng $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathbf{R}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathbf{C}$), X là không gian các dãy vô hạn $x = (x_0, x_1, \dots)$ ($x_n \in \tilde{X}$, $n = 0, 1, \dots$) với các phép toán tự nhiên trên dãy (phép cộng hai dãy và phép nhân dãy với đại lượng vô hướng). Tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính tác dụng trong X được ký hiệu bởi $L(X)$, $L_0(X) := \{A \in L(X) : \operatorname{dom} A = X\}$. Ký hiệu $R(X)$ là tập hợp tất cả các toán tử khả nghịch phải trong $L(X)$. Nếu $D \in R(X)$ và $\exists R \in L_0(X)$ sao cho $DR = I$ thì ta viết $D \in R_0(X)$. Ứng với mỗi $D \in R(X)$, ký hiệu $\mathcal{R}_D$ và $\mathcal{F}_D$ lần lượt là tập các nghịch đảo phải và toán tử ban đầu của D. Khi $F \in \mathcal{F}_D$ và $R \in \mathcal{R}_D$ mà $FR = 0$ thì ta nói F là toán tử tương ứng với R. Tập hợp tất cả các toán tử Volterra trong $L_0(X)$ được ký hiệu bởi $V(X)$. Vậy $A \in V(X) \longleftrightarrow \operatorname{dom} A = X$, $\operatorname{Im} A \subset X$ và $\exists (I + \lambda A)^{-1}\ \forall \lambda \in \mathcal{F}$.

Giả sử $e = (\beta_0, \beta_1, \dots)$, $\beta_0 \neq 0$ và $\beta_i \in \mathcal{F}$, $X_0 = \operatorname{lin}\{e\}$.

Ứng với trọng cho trước tùy ý $p = (p_0, p_1, \dots)$, $p_n \in \mathcal{F}$ ta xét các toán tử tuyến tính xác định theo các công thức sau:

$$D_p x = \{x_{n+1} - p_n x_n\} \tag{1}$$

$$R_p x = y; \quad y_0 = 0, \quad y_1 = x_0,$$
$$y_{n+1} = x_n + \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=k+1}^{n} p_j x_k, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

$$A_p x = -\frac{x_0}{p_0}\{\beta_{n+1} - p_n \beta_n\} \tag{3}$$

$$\tilde{D}_p := D_p + A_p \tag{4}$$

Khi đó có các kết quả sau đây.

Bổ đề 1. [3], $\ker \tilde{D}_p = X_0$

Bổ đề 2. $D_p^N x = y$ với $y_0 = x_N$,

$$y_n = x_{n+N} + \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \Big(\sum_{k_1, \dots, k_i = 0}^{N-i} p_{n+k_1} \cdots p_{n+k_i} \Big) x_{n+N-i} \quad (N \in \mathbf{N},\ n = 1, 2, \dots) \tag{5}$$

Chứng minh. Đặt

$$S_i = \sum_{k_1, \dots, k_i = 0}^{N-i} p_{n+1+k_1} p_{n+1+k_2} \cdots p_{n+1+k_i} \quad (k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_i)$$

$$Q_{i-1} = \sum_{k_1, \dots k_i = 0}^{N-i+1} p_{n+k_1} p_{n+k_2} \cdots p_{n+k_{i-1}}. \quad (k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_{i-1})$$

Khi đó dễ dàng kiểm tra đẳng thức sau

$$S_i + p_n Q_{i-1} = \sum_{k_1,\dots,k_i=0}^{N-i+1} p_{n+k_1} p_{n+k_2} \dots p_{n+k_i} \quad (k_1 \le k_2 \le \dots \le k_i) \tag{6}$$

Sử dụng (6), bằng phương pháp qui nạp, ta có

$$D_p^{N+1} x = D_p D_p^N x = D_p y = \{y_{n+1} - p_n Y_n\}$$

trong đó

$$y_{n+1} = x_{n+1+N} + \sum_{i=1}^{N} (-i)^i S_i x_{n+1+N-i} = x_{n+1+N} + \sum_{i=2}^{N} (-1)^i S_i x_{n+1+N-i} - S_1 x_{n+N}$$

$$p_n y_n = p_n x_{n+N} + p_n \sum_{i=1}^{N} (-1)^i Q_i x_{n+N-i} = p_n x_{n+N} + p_n \sum_{j=2}^{N+1} (-1)^{j-1} Q_{j-1} x_{n+1+N-j}$$

$$= p_n x_{n+N} - p_n \sum_{j=2}^{N} (-1)^j Q_{j-1} x_{n+1+N-j} + (-1)^N Q_N x_n$$

Vì $Q_N = p_n^N$ nên

$$p_n y_n = p_n x_{n+N} - p \sum_{i=2}^{N} (-1)^i Q_{i-1} x_{n+1+N-i} + (-1)^N p_n^N x_n$$

Áp dụng (6) ta được

$$y_{n+1} - p_n y_n = x_{n+1+N} + \sum_{i=1}^{N+1} (-1)^i \sum_{k_1,\dots,k_i=0}^{N+1-i} p_{n+k_1} \dots p_{n+k_i}) x_{n+N+1-i}, \quad (k_1 \le \dots \le k_i) \quad \square .$$

Cũng bằng phương pháp qui nạp, ta dễ dàng kiểm tra đẳng thức sau

Bổ đề 3. $\forall N \in N^+$,

$$A_p^N x = (-1)^N (p_2 - p_1\beta_1)^{N-1} p_1^{-N} \{\beta_{n+1} x_1 - p_n \beta_n x_1\}$$

Hệ quả 1.

$$\tilde{D}_p^N = D_p^N + A_p^N \tag{6}$$

Tương tự, ứng với mỗi $N \in N^+$ cho trước, toán tử $\tilde{R}_p^N$ xác định theo công thức (7) là nghịch đảo phải của $\tilde{D}_p^N$.

$$\tilde{R}_p^N x = y \quad \text{với}$$

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad \text{khi} \quad n = 0, 1, \dots, N_1 \\ x_0 \quad \text{khi} \quad n = N \\ x_{n-N} + \sum_{i=1}^{n-N} \Big(\sum_{k_1,\dots,k_{n-N-i}=0}^{N-i} p_{i+k_1} \dots p_{i+k_{n-N-i}} \Big) x_i \\ \qquad (k_1 < \dots < k_{n-N-i}) \quad n = N+1, \dots \end{cases} \tag{7}$$

Hệ quả 2.

$$\tilde{D}_p \tilde{R}_p^N = \tilde{R}_p^{N-1}, \quad N \in N^+ \tag{8}$$

Hệ quả 3. Toán tử ban đầu $\tilde{F}_p$ của $\tilde{D}_p$ tương ứng với nghịch đảo phải $\tilde{R}_p$ của $\tilde{D}_p$ được xác định theo công thức

$$\tilde{F}_p x = \frac{x_0}{\beta_0} e \quad \text{với} \quad e = (\beta_0 I, \beta_1 I, \dots) \tag{9}$$

Từ các kết quả trên, ta có thể phát biểu định lý khai triển Taylor dưới dạng:

Định lý 1. $\forall N \in N^+$ đều có biểu diễn

$$I = \tilde{F}_p + \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{R}_p^k \tilde{F}_p (D_p)^k + \tilde{R}_p^N \tilde{D}_p^N$$

trong đó $\tilde{D}_p^k$, $\tilde{R}_p^k$ và $\tilde{F}_p^k$ lần lượt được xác định theo các công thức (6), (7) và (9).

2. Áp dụng.

a) Xét phương trình sai phân bậc nhất với trọng p và với nhân là không gian con X_0:

$$\tilde{D}_p x - \lambda x = y, \quad y \in X \tag{10}$$

$$F_p x = u, \quad u \in X_0 \tag{11}$$

Viết (10) dưới dạng:

$$\tilde{D}_p (I - \lambda \tilde{R}_p) x = y$$

$$(I - \lambda \tilde{R}_p) x = \tilde{R}_p y + z, \quad z \in X_0$$

Sử dụng (10), ta được (10)-(11) tương đương với phương trình

$$(I - \lambda \tilde{R}_p) x = \tilde{R}_p y + u \tag{12}$$

Bổ đề 4. $\tilde{R}_p \in V(X)$

Chứng minh. Thật vậy, phương trình

$$(I - \lambda \tilde{R}_p) x = v, \quad v \in X$$

luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo hệ thức truy hồi

$$x_0 = v_0$$

$$x_{n+1} = v_{n+1} + \lambda \Big(v_n + \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k} (p_{n-i} + \lambda) v_{n-k} \Big).$$

Vậy

$$(I - \lambda R_p)^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathcal{F} \quad \text{hay} \quad \tilde{R}_p \in V(X).$$

Áp dụng Bổ đề 4, bài toán (10)-(11) luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo công thức

$$x = (x_0, x_1, \dots)$$

$$x_0 = v_0$$

$$x_{n+1} = v_{n+1} + \lambda \Big(v_n + \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k} (p_{n-i} + \lambda) v_{n-k} \Big)$$

Với $v = \tilde{R}_p y + u$, $\tilde{R}_p$ xác định theo công thức (7).

b) Tương tự, xét bài toán Cauchy đối với toán tử sai phân bậc cao có trọng biến thiên p cho trước:

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \tilde{D}_p^j x = y, \quad y \in X \tag{13}$$

$$\tilde{F}_p \tilde{D}_p^k x = u^k, \quad u^k \in X_0, \quad k = 0, 1, \ldots, N_1 \tag{14}$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathcal{F}; \quad \lambda_N = 1$$

Viết phương trình (13) dưới dạng

$$\tilde{D}_p^N \Big(\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \tilde{R}_p^{N-j} x \Big) = y \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \tilde{R}_p^{N-j} x = \tilde{R}_p^N y + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{R}_p^j z^i,$$

$Z^j \in X_0$, $j = 0, 1, \ldots, N_1$.

Kết hợp với điều kiện ban đầu Cauchy (14), bài toán Cauchy (13)-(14) tương đương với phương trình

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \tilde{R}_p^{N-j} x = \tilde{R}_p^N y + \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{R}_p^j u^j \tag{15}$$

Giả sử $t_1, t_2, \ldots, t_n$ là các nghiệm của đa thức

$$P(t) = \sum_{j=0}^{N} \lambda_j t^j$$

Khi đó

$$(15) \longleftrightarrow \prod_{j=1}^{N} (I - t_j \tilde{R}_p) x = \tilde{R}_p^N y + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{R}_p^j u^j \tag{15'}$$

Nghiệm của phương trình (15') được tính theo công thức truy hồi (dựa vào kết quả của bài toán (10)-(11) theo các nghiệm:

$$(I - t_1 \tilde{R}_p) x^1 = \tilde{R}_p^N y + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{R}_p^j u^j,$$

$$(I - t_k \tilde{R}_p) x^{k+1} = x^k, \quad k = 1, \ldots, N_1 - 1$$

$$x = x^N$$

Vậy bài toán Cauchy (13)-(14) luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo công thức

$$x = x^N$$

$$x^k = (x_0^k, x_1^k, \ldots)$$

$$x_0^{k+1} = x_0^k$$

$$x_{n+1}^{k+1} = x_{n+1}^k + \lambda \Big(x_n^k + \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{j} (p_{n-i} + t_{j+1}) x_{n-j}^k \Big)$$

$$x_0^1 = v_0$$

$$x_{n+1}^1 = v_{n+1} + \lambda \Big(v_n + \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{j} (p_{n-j} + t_1) v_{n-j} \Big)$$

Với $v = \tilde{R}_p^N y + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{R}_p^j u^j \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

$\tilde{R}_p^N$ xác định theo công thức (7)

c) Dựa vào các biểu thức tường minh của $(I - \lambda R_p)^{-1}$ ta có thể xây dựng được các hàm số lượng giác cơ bản trên dẫy.

$$\forall \lambda \in \mathcal{F}, \quad \text{đặt} \quad e_\lambda = (I - \lambda \tilde{R}_p)^{-1}$$

Khi đó, $\forall Z \in X_0$ ta có

$$e_\lambda(z) = t\Big\{\beta_{n+1} + \lambda\beta_n + \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{i=1}^{k} (p_{n-k} + \lambda)\beta_{n-k}\Big\}$$

trong đó $z = te$, $t \in \mathcal{F}$.

Định nghĩa các hàm cos và sin theo công thức Euler

$$c_\lambda(z) = \frac{1}{2}\big[e_{\lambda i}(z) + e_{-\lambda i}(z)\big]$$
$$s_\lambda(z) = \frac{1}{2i}\big[e_{\lambda i}(z) - e_{-\lambda i}(z)\big]$$

ta thu được các biểu thức tường minh của các hàm số cos và sin :

$$c_\lambda(z) = \Big\{\beta_{n+1} cI + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \Big[\prod_{j=1}^{k} (p_{n-j} + i\lambda) + \sum_{j=1}^{k} (p_{n-j} - i\lambda)\Big]\beta_{n-k} cI\Big\}$$
$$s_\lambda(z) = \Big\{\beta_n \lambda cI + \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n-1} \Big[\prod_{j=1}^{k} (p_{n-j} + i\lambda) - \prod_{j=1}^{k} (p_{n-j} - i\lambda)\Big]\beta_{n-k} cI\Big\}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis, Warsaw - Dordrecht 1988.
2. Nguyen Van Mau, Characterization of right Volterra inverses. Opuscula Math. **6** (1990), 21-37.
3. Nguyen Vu Luong, On a class of generalized difference operators, J. of Sci. 1993, 21-25.

VNU,H Journal of science, Nat. sci. t.XI, n°1, 1995

TAYLOR FORMULA FOR WEIGHTED DIFFERENCE OPERATORS AND ITS APPLICATIONS

Nguyen Vu Luong
Faculty of Mathematics, Hanoi University

The paper deal with operators of the from $D_p x = (x_{n+1} - px_n)$. We find a evident form of R_p^k, D_p^k. We present in evident form the Taylor formula for weighted difference operators. Moreover, we find general solutions of Cauchy problem with scalar coefficients and general form of sine and cosine elements in sequences.