CÁC CÔNG THỨC CHUẨN TẮC VÀ PHÉP SUY DẪN TRONG LỚP CÁC PHỤ THUỘC BOOLE DƯƠNG ĐA TRỊ

VŨ NGỌC LOÃN

Khoa Toán, ĐH khoa học tự nhiên ĐHQGHN

1. Đặt vấn đề.

Trong [7] đã giới thiệu về họ các phụ thuộc Boole và một số tính chất cơ bản của chúng. Tiếp theo [2,3] đã phát triển các kết qủa về loại phụ thuộc này. Một lớp con khá rộng của nó là lớp các phụ thuộc Boole dương tổng quát (PTBDTQ) đã được các tác giả quan tâm nghiên cứu. Dựa vào định lý tương đương trong [5], một số kết quả liên quan đến tính dẫn được và một số tính chất của quan hệ Armstrong đã được nghiên cứu. Cũng trên cơ sở của định lý tương đương trong [9] đã phát triển thêm một số kết quả khác liên quan đến tính dẫn duợc trong lớp các phụ thuộc này.

Mục đích của bài viết là nghiên cứu một số kết quả liên quan đến tính dẫn được trong lớp các phụ thuộc Boole dương đa trị (PTBDĐT). Bài viết trình bày khái niệm các công thức chuẩn tắc và đã khẳng định rằng: Với mỗi công thức logic chỉ chứa các liên kết lôgic ^ và v thì luôn luôn có thể biểu diễn được bằng một công thức ở dạng chuẩn tắc. 9, các tác giả cũng đã phát biểu định lý tương đương đối với các phụ thuộc Boole dương đa trị. Định lý này là tổng quát hóa so với định lý tương đương đã phát biểu trong [5] đối với lớp PTBDTQ. Trên cơ sở của định lý tương đương đối với lớp PTBDĐT, bài viết đã mở rộng một số kết quả trong [5] về tính dẫn được đồng thời phát triển thêm một số kết quả mới.

Bài này gồm 4 phần. Phần đầu giới thiệu chung. Phần hai đưa ra một số khái niệm cơ bản và các kết quả cơ sở. Phần ba trình bày một số kết quả liên quan đến tính dẫn được. Trong phần này bài báo khẳng định rằng: Thay cho việc nghiên cứu tính dẫn được của lớp các công thức f, g → h trong đó f, g, h là các PTBDĐT chỉ chứa các liên kết lôgic ^ và v ta chỉ cần nghiên cứu tính dẫn được của lớp các công f', g' → h' với f', g', h' là các PTBDĐT chuẩn tắc là đủ. Bài viết cũng chỉ ra điều kiện cần và đủ để có $\Sigma \overset{m}{\models} f$, $\Sigma \overset{m}{\models} g \to h$. Cũng dựa vào định lý tương dương, các điều kiện cần và đủ cho 4 dạng suy dẫn sau đây cũng được phát biểu: $\Sigma \overset{m}{\models} h_1 \to h_2$, $\Sigma \overset{m}{\models} h_1 \to t_1$, $\Sigma \overset{m}{\models} t_1 \to h_1$, $\Sigma \overset{m}{\models} t_1 \to t_2$. Trong đó h_1, h_2 là các công thức ở dạng chuẩn tắc hội còn t_1, t_2 là các công thức ở dạng tuyển. Phần thứ 4 dành cho lời kết luận và hướng nghiên cứu của chúng tôi.

2. Các định nghĩa cơ bản.

Định nghĩa 2.1. Giả sử $U = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là một tập hữu hạn khác trống. Nói rằng trên U xác định một vị trí đa trị nếu: Với mỗi phần tử $A_i \in U \le i \le n$ có một tập hữu hạn B_i được gọi là miền đánh giá của A_i , thỏa mãn các điều sau:

1. $B_i \subset [0,1]$,

2. Nếu $s \in B_i$ thì $1-s \in B_i$,

3. $1 \in B_i$.

Đặt. $K = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, mỗi $s \in K$ được gọi là một hằng lôgic. Với $s_1, s_2 \in K$, ta xác định các liên kết lôgic v, ^, $\rightarrow$, $\neg$, $\approx$ trên K như sau: $s_1, s_2 = \max\{ s_1, s_2 \}$, $s_1 \wedge s_2 = \min \{ s_1, s_2 \}$ $s_1 \rightarrow s_2 = \max \{1- s_1, s_2\}$, $\neg s_1 = 1 - s_1$, $s_1 \approx s_2 = 1$ nếu $s_1 = s_2$, $s_1 \approx s_2 = 0$ nếu $s_1 \neq s_2$.

Ký hiệu $B = B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$. Một ánh xạ $x : U \rightarrow K$ sao cho $x(A_i) = x_i$, $1 \le i \le n$ khi đó ta ký hiệu x bởi $(x_1, x_2, ..., x_n) \in B$.

Định nghĩa 2.2. Các phần tử trong U được gọi là các biến lôgic hay là các biến sơ cấp. Các hằng lôgic trong K và các biến lôgic trong U được gọi là các công thức.

Giả sử g, h là các công thức, khi đó ta có thể xây dựng các công thức mới bằng việc sử dụng các liên kết lôgic v, ^, $\rightarrow$, $\neg$, $\approx$ và các công thức đã cho. Điều đó có nghĩa rằng (g ^ h) (g v h), $\neg$ (g), (g $\rightarrow$ h), (h $\approx$ g) là các liên kết logic đã nêu ở trên bở F. Mỗi $f \in F$ được gọi là một phụ thuộc Boole đa trị.

Cho $f \in F$ và $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in B$. Khi đó ta gọi f(x) là giá trị chân lý của f đối với đánh giá x và được xác định như sau: Nếu f là một biến A_i thì $f(x) = x_i$. Khi f được tạo nên từ các công thức g, h và các kết lôgic v, ^, $\rightarrow$, $\neg$, $\approx$ thì ta xác định f(x) như sau:

. Nếu $f = (g \wedge h)$ thì $f(x) = g(x) \wedge h(x)$

. Nếu $f = (g \vee h)$ thì $f(x) = g(x) \vee h(x)$

. Nếu $f = (g \rightarrow h)$ thì $f(x) = g(x) \rightarrow h(x)$

. Nếu $f = \neg (g)$ thì $f(x) = \neg (g(x))$

. Nếu $f = (g \approx h)$ thì $f(x) = g(x) \approx g(x)$

Dễ thấy rằng với bất kỳ $f \in F$, $x \in B$ ta luôn có $f(x) \in K$. Để ngắn gọn, thay cho các công thức (g ^ h), (g v h), $\neg$ (g), (g $\rightarrow$ h), (h $\approx$ g) ta viết g ^ h, g v h, $\neg$ g, g $\rightarrow$ h, g $\approx$ h một cách tương ứng.

Định nghĩa 2.3. Giả sử T là một tập các đánh giá trên U và $g, h \in F$. Nói rằng g và h là tương đương trên T và ký hiệu là $g \underset{=}{T} h$ nếu với bất kỳ $x \in T$, luôn có đẳng thức sau: g(x) = h(x). Rõ ràng đó là một quan hệ tương đương. Khi T = B ta nói rằng g và h là tương đương và ký hiệu là g = h.

Định nghĩa 2.4. Một hội sơ cấp là một công thức được tạo bởi các biến sơ cấp, các phủ định các biến sơ cấp và liên kết lôgic ^.

Định nghĩa 2.5. Một tuyển sơ cấp là một công thức được tạo bởi các biến sơ cấp, các phủ định của các biến sơ cấp và liên kết lôgic v.

Định nghĩa 2.6. Một công thức lôgic t được gọi là ở dạng chuẩn tắc tuyển nếu nó có thể biểu diễn như sau $t = h_1 \vee h_2 ... \vee h_k$ trong đó mỗi h_i, $1 \le i \le n$ k là một hội sơ cấp.

Định nghĩa 2.7. Một công thức lôgic h được gọi là ở dạng chuẩn tắc hội nếu nó có thể biểu diễn như sau $h = t_1 \wedge t_2 ... \wedge t_k$, trong đó mỗi h_i, $1 \le i \le n$ k là một tuyển sơ cấp.

Lưu ý rằng: Mỗi hội sơ cấp là một công thức ở dạng chuẩn tắc tuyển và mỗi tuyển sơ cấp là một công thức ở dạng chuẩn tắc hội. Một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển hoặc ở dạng chuẩn tắc hội đôi khi được gọi ngắn gọn là công thức ở dạng chuẩn tắc hoặc là công thức chuẩn tắc.

Bổ đề 2.1.

a. Tuyển của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu phủ định ¬ có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu ¬.

b. Hội của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội không chứa dấu phủ định ¬ có thể biểu diễn bằng một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội không chứa dấu ¬.

c. Hội của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu phủ định ¬ có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu ¬.

Chứng minh.

a) Dễ dàng thấy rằng phép tuyển v có tính kết hợp từ đó suy ra tính đúng đắn của khẳng định a.

b) Cũng chứng minh tương tự như phần a.

c) Giả sử t_1, t_2 là hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu phủ định và $t_1 = h_1 \vee h_2 \vee ... \wedge h_p$, $t_2 = c_1 \vee 2_2 \vee ... \wedge c_q$ trong đó h_i, $1 \le i \le p$ và c_j, $1 \le j \le q$ là những hội sơ cấp không chứa dấu phủ định. Với $x \in B$, ta đặt $m_1 = \max \{ h_1(x)\ h_2(x), ... h_p(x)\}$, $m_2 = \max \{ 1_1(x)\ c_2(x), ... c_q(x$. Khi đó sẽ tồn tại i và j, với $1 \le i \le p$, $1 \le j \le q$ sao cho $m_1 = h_i(x)$, $m_2 = c_j(x)$. Giả sử $t = t_1 \wedge t_2 = (h_1 \vee h_2 \vee ... \wedge h_p) \wedge (c_1 \vee c_2 \vee ... \wedge c_q)$ (1). Ta có $t(x) = \min \{ m_1, m_2 \}$. Đặt $t' = (h_1 \wedge c_1) \vee (h_1 \wedge c_2) \vee ... \vee (h_1 \vee c_q) \vee (h_2 \wedge c_1) \vee ... \vee (h_2 \wedge c_q) \vee ... \vee (h_p \vee c_1) \vee ... \vee (h_p \wedge c_q)$ (2). Rõ ràng t' là một công thức có dạng chuẩn tắc tuyển không chứa liên kết phủ định ¬. Ta sẽ chỉ ra t = t'. Thật vậy, không khó khăn ta kiểm tra được $t'(x) \le m_1$ và $t'(x) \le m_2$. Do đó $t'(x) \le \min \{ m_1, m_2 \}$ (3). Từ (2) suy ra $t'(x) \ge h_i(x) \wedge c_j(x) = \min\{ m_1, m_2 \}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $t'(x) = \min \{ m_1, m_2\}$ và do đó t(x) với mọi $x \in B$. Vậy t = t'. Khẳng định c đã được kiểm tra và do đó bổ đề được chứng minh xong.

Bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được bổ đề sau.

Bổ đề 2.2. Cho h là một công thức ở dạng chuẩn tắc hội không chứa dấu phủ định ¬, khi đó sẽ tồn tại một công thức lôgic t ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu phủ định ¬ sao cho h = t.

Chứng minh. Giả sử h là một công thức ở dạng chuẩn hội và h có biểu diễn $h = t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots t_k$, trong đó $1 \le i \le k$ là một tuyển sơ cấp. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại một công thức t ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa liên kết phủ định ¬ sao cho h = t. Sử dụng phép quy nạp theo k.

. Với k = 1, hiển nhiên khẳng định là đúng.

. Giả sử bổ đề đã đúng với mọi công thức ở dạng chuẩn tắc hội $h = t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots \wedge t_k$ với $k < p$. Bây giờ ta xét với k = p. Đặt $h_1 = t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots \wedge t_{k-1}$. Rõ ràng $k-1 < p$, theo giả thiết quy nạp sẽ tồn tại một công thức lôgic T_1 ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa liên kết phủ định ¬ sao cho $h_1 = T_1$. Ta có $h = T_1 \wedge t_k$ (1). Áp dụng bổ đề 2.1 suy ra h có thể biểu diễn bởi một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu phủ định. Bổ đề được chứng minh xong.

Từ bổ đề trên ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.1. Mỗi công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc không chứa dấu phủ định ¬ thì luôn luôn có thể được biểu diễn bằng một công thức ở dạng chuẩn tắc tuyển không chứa dấu phủ định ¬.

Bổ đề 2.3. Giả sử c_1, c_2 là hai công thức ở dạng chuẩn tắc và không chứa liên kết phủ định ¬. Khi đó sẽ tồn tại các công thức n_1, n_2 cũng ở dạng chuẩn tắc và không chứa liên kết phủ định sao cho $n_1 = c_1 \vee c_2$, $n_2 = c_1 \wedge c_2$.

Chứng minh. Áp dụng hệ quả 2.1, các bổ đề 2.1, 2.2 ta suy ra điều cần chứng minh.

Định lý 2.1. Mỗi công thức lôgic được tạo bởi các biến lôgic và các liên kết logic ^, v luôn luôn có thể được biểu diễn bởi một công thức ở dạng chuẩn tắc mà các hội sơ cấp hoặc các tuyển sơ cấp không chứa phủ định của các biến sơ cấp.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo tổng số các liên kết ^, v có mặt trong công thức.

Khi tổng số liên kết ^, v trong c xuất hiện không quá một thì rõ ràng khẳng định là đúng.

Giả sử rằng với một công thức c bất kỳ chỉ chứa các liên kết ^ và v mà tổng số i của số lần xuất hiện các liên kết ^, v trong c không quá số p thì khẳng định đúng. Ta sẽ chứng minh khẳng định trên cũng đúng với $i = p + 1$. Từ cách xây dựng công thức c sẽ tồn tại hai công thức c_1, c_2 sao cho chúng không chứa các liên kết phủ định và có đẳng thức $c = c_1 \wedge c_2$ hoặc $c = c_1 \vee c_2$. Vì c có tổng số lần xuất hiện của các liên kết ^ và v là p + 1, từ đó suy ra trong các công thức c_1 và c_2 đều không xuất hiện quá p lần các liên kết lôgic ^ và v. Theo giả thuyết quy nạp sẽ tồn tại hai công thức lôgic k_1, k_2 ở dạng chuẩn tắc và không chứa liên kết phủ định sao cho $c_1 = k_1$, $c_2 = k_2$. Từ bổ đề 2.3 suy ra tồn tại các công thức n_1, n_2 ở dạng chuẩn tắc không chứa liên kết phủ định sao cho $n_1 = k_1 \wedge k_2$, $n_2 = k_1 \vee k_2$ và $c = n_1$ hoặc $c = n_2$. Từ đó ta suy ra định lý đã được chứng minh.

Giả sử $U = \{A_2, A_2, \ldots, A_n\}$ là lập các thuộc tính. Với mỗi A_i, $1 \le i \le n$ có một tập d_i nào đó gồm ít nhất hai phần tử được gọi là miền trị của thuộc tính đó. Với $A \in U$ miền trin của A cũng được ký hiệu là dom (A).

Một tập con R hữu hạn của tích $d_1 \times d_2 \times ... \times d_n$ được gọi là một quan hệ trên U. Mỗi $t \in R$ được gọi là một bộ. Tập tất cả các quan hệ trên tập thuộc tính U được ký hiệu là REL(U). Giả sử $t \in R$, $A \in U$ khi đó ký hiệu t.A là giá trị của t đối với thuộc tính A. Đặt t.X là tập $\{t.A \mid A \in X\}$.

Định nghĩa 2.8. Với các tập d_i , $1 \le i \le n$ ta xét các ánh xạ $\alpha_i : d_i \times d_i \rightarrow B_i$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $(\forall a \in d_i)(\alpha_i(a,b) = 1)$,

2. $(\forall a, b \in d_i)(\alpha_i(a,b) = \alpha_i(b, a))$,

3. $(\forall a \in B_i , \exists a, b \in d_i)(\alpha_i(a,b) = s)$.

Với $m \in [0, 1]$, $f \in F$, $\Sigma \subseteq F$, ta đặt $T^m f = \{x \in B \mid f(x) \ge m\}$ và $T^m \Sigma = \{x \in B \mid \forall f \in \Sigma, f(x) \ge m\}$.

Một công thức $f \in F$ được gọi là dương nếu $f(e) = 1$ với $e = (1,1,..., 1) \in B$. Ký hiệu Fp là tập tất cả các công thức dương trên U. Mỗi $f \in Fp$ được gọi là một phụ thuộc Boole dương đa trị và được viết tắt là PTBDĐT. Giả sử có $R \in REL(U)$ và $u, v \in R$, khi đó đánh giá $\{\alpha_1(u.A_1, v.A_1), \alpha_2(u.A_2, v.A_2),..., \alpha_n(u.A_n, v.A_n)\}$ được ký hiệu bởi $\alpha(u, v)$. Đặt $T_R = \{\alpha(u, v) \mid u, v \in R\}$.

Định nghĩa 2.9. Giả sử $f, g \in Fp$, $m \in [0, 1]$. Nói rằng g là m- suy ra dẫn f hoặc f là m- suy dẫn được từ g, được ký hiệu là $g \models^{m} f$, nếu với bất kỳ $x \in B$, thỏa mãn $g(x) \ge m$ thì ta cũng có $f(x) \ge m$. Hai công thức f và g được gọi là m- tương đương nếu $g \models^{m} g$ và $g \models^{m} f$.

Với $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq F$, $f \in F$, nói rằng, Σ là m- suy dẫn f hoặc f là m- dẫn được từ tập Σ, ký hiệu là $\Sigma \models^{m} f$, nếu $T^m\Sigma \subseteq T^m f$. Giả sử $\Sigma, \Gamma \subseteq F$. Tập Γ được gọi là m- suy dẫn được từ tập Σ, ký hiệu là $\Sigma \models^{m} \Gamma$ nếu $\Sigma \models^{m} f$ cho mỗi $f \in \Gamma$. Nói rằng, Σ và Γ là m- tương đương, ký hiệu là $\Sigma \stackrel{m}{\equiv} \Gamma$, nếu $\Sigma \models^{m} \Gamma$ và $\Gamma \models^{m} \Sigma$.

Định nghĩa 2.10. Giả sử $m \in [0,1]$, $R \in REL(U)$ và $f \in Fp$. Nói rằng R là m- thỏa f, ký hiệu là $R^m(f)$ nếu $T_R \subseteq T^m f$. Với $\Sigma \subseteq Fp$, khi đó m- được gọi là m- thỏa tập PTBDĐT Σ, ký hiệu là $R^m(\epsilon)$ nếu với mọi $f' \in \Sigma$ có $R^m(f)$. Điều đó tương đương với $T_R \subseteq T^m \Sigma$. Nếu $R \in REL(U)$ và R không phải là m- thỏa f, thì ta viết $\neg R(f)$. Nếu R không phải là m- thỏa Σ thì viết $\neg R^m(\Sigma)$.

Định nghĩa 2.11. Cho $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$ và $f \in Fp$. Ta ký hiệu $\Sigma \stackrel{m}{\models} f$ có nghĩa là với mọi $R \in REL(U)$ nếu $R^m(\Sigma)$ thì $R^m(f)$. Ký hiệu $\Sigma \stackrel{m}{\models}_2 f$, có nghĩa là với mọi $R \in REL(U)$ và R chỉ có hai bộ, nếu $R^m(\Sigma)$ thì ta cũng có $R^m(f)$.

Giả sử $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$ và $R \in REL(U)$. Ta ký hiệu Σ_m^+ là tập $\{f \mid \Sigma \stackrel{m}{\models} f\}$. Ký hiệu $LD^m(R)$ là tập tất cả các PTBDĐT trên U mà chúng là m- thỏa R.

3. Các m-suy dẫn.

Giả sử $m \in [0,1]$. Cho tập $\Sigma \subseteq Fp$ và $f \in Fp$. Hỏi rằng suy dẫn $\Sigma \overset{m}{\models} f$ có đúng hay không ? Trước khi xet một số kết quả liên quan đến tính dẫn được, ta hãy phát biểu định lý tương đương và nêu ra một vài hệ quả trực tiếp của nó.

Định lý 3.1. [9] (Định lý tương đương). Giả sử có $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$, $f \in Fp$. Khi đó các điều sau là tương đương

1. $\Sigma \overset{m}{\models} f$ 2. $\Sigma \overset{m}{\models} f$ 3. $\Sigma \overset{m}{\models} 2f$

Từ định lý trên ta dễ dàng suy ra bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. Cho $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$ và $f, g \in Fp$. Nếu có $\Sigma \overset{m}{\models} f$ và $\Sigma \overset{m}{\models} g$ thì các điều sau là đúng.

1. $\Sigma \overset{m}{\models} f \wedge g$, 2. $\Sigma \overset{m}{\models} f \vee g$, 3. $\Sigma \overset{m}{\models} f \to g$

Định lý 3.2. Giả sử $m \in [0,1]$, Σ, $\Gamma \subseteq Fp$. Cho $\Sigma \overset{m}{\models} \Gamma$. Khi đó với công thức bất kỳ ϕ được tạo bởi các công thức trong Γ và các liên kết lôgic ^, v, $\to$ thì luôn có $\Sigma \overset{m}{\models} \phi$.

Chứng minh. Dựa vào bổ đề 3.1.

Trực tiếp suy ra từ định lý 2.1 ta có hai khẳng định sau:

Định lý 3.3. Giả sử $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$, $f \in Fp$ và f chỉ chứa các liên kết lôgic ^, v. Khi đó điều kiện cần và đủ $\Sigma \overset{m}{\models} f$ là tồn tại $f' \in Fp$ sao cho f' là một công thức ở dạng chuẩn tắc không chứa dấu phủ định $\neg$ và $\Sigma \overset{m}{\models} f'$.

Định lý 3.4. Cho $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$. Giả sử $g, h \in Fp$ và chúng chỉ chứa các liên kết lôgic ^, v. Khi đó điều kiện cần và đủ $\Sigma \overset{m}{\models} g \to h$ là tồn tại $g', h' \in Fp$ sao cho g', h' là các cộng thức ở dạng chuẩn tắc không chứa dấu phủ định $\neg$ $\Sigma \overset{m'}{\models} g' \to h'$.

Theo định lý 3.4 ta thấy rằng với $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$ và hai công thức $g, h \in Fp$ chỉ chứa các liên kết lôgic ^, v thì khi nghiên cứu lớp các suy dẫn có dạng $\Sigma \overset{m}{\models} g \to h$, ta chỉ cần quan tâm đến các công thức g và h ở dạng chuẩn tắc không chứa dấu phủ định $\neg$ là dủ. Định lý sau đây sẽ nếu ra điều kiện cần và đủ cho các suy dẫn dạng $\Sigma \overset{m}{\models} g \to h$, trong đó $\Sigma \subseteq Fp$, $g,h \in Fp$, và chúng là các PTBDĐT ở dạng chuẩn tắc.

Định lý 3.5.[9] Giả sử $m \in [0,1]$, $\Sigma \subseteq Fp$, và $X_i, Y_j \subseteq U$ với $1 \le i \le k$, và $1 \le j \le h$. Khi đó ta có:

1. $\Sigma \overset{m}{\models} (\wedge X_1) \vee (\wedge X_2) \vee \dots \vee (\wedge X_k) \to (\wedge Y_1) \vee (\wedge Y_2) \vee \dots \vee (\wedge Y_h)$ khi và chỉ khi với bất kỳ $x \in T^m{}_\Sigma$ và với mỗi i, $1 \le i \le k$ sẽ tồn tại $B \in X_i$ sao cho $x(B) \le 1 - m$ hoặc tồn tại j, $1 \le j \le h$ sao cho với mỗi $C \in Y_j$, ta có $x(C) \ge m$.

2. $\Sigma \mid \stackrel{m}{=} (\wedge X_1) \vee (\wedge X_2) \vee \ldots \vee (\wedge X_k) \rightarrow (\vee Y_1) \wedge (\vee Y_2) \wedge \ldots \wedge (\vee Y_h)$ khi và chỉ khi với bất kỳ $x \in T^m{}_\Sigma$ và với mỗi i, $1 \le i \le k$ sẽ tồn tại $B \in X_i$ sao cho $x(B) \le 1 - m$ hoặc với mỗi j, $1 \le j \le h$ thì tồn tại $C \in Yj$ sao cho $x(C) \ge m$.

3. $\Sigma \mid \stackrel{m}{=} (\vee X_1) \wedge (\vee X_2) \wedge \ldots \wedge (\vee X_k) \rightarrow (\wedge Y_1) \vee (\wedge Y_2) \vee \ldots \vee (\wedge Y_h)$ khi và chỉ khi với bất kỳ $x \in T^m{}_\Sigma$ sẽ tồn tại i, $1 \le i \le k$ sao cho với mọi $B \in X_i$ hoặc tồn tại j, $1 \le j \le h$ sao cho với mỗi $C \in Yj$, thì $x(C) \ge m$.

4. $\Sigma \mid \stackrel{m}{=} (\vee X_1) \wedge (\vee X_2) \wedge \ldots \wedge (\vee X_k) \rightarrow (\vee Y_1) \wedge (\vee Y_2) \wedge \ldots \wedge (\vee Y_h)$ khi và chỉ khi với bất kỳ $x \in T^m{}_\Sigma$,sẽ tồn tại i, $1 \le i \le k$ sao cho với mỗi $B \in X_i$ thì $x(B) \le 1 - m$ hoặc với mỗi j, $1 \le j \le h$ sẽ tồn tại $C \in Yj$ sao cho $x(C) \ge m$.

4. Kết luận. Từ một số kết quả đã trình bày trong bài này và trong một số bài khác như [5,9] ta thấy rằng định lý tương về tính dẫn được trong lớp các quan hệ có số bộ tùy ý cũng như trong lớp các quan hệ chỉ gồm có hai bộ hay trong lôgic mệnh đề thực sự là một công cụ tốt để nghiên cứu một số các bài toán liên quan các lớp phụ thuộc Boole nói chung cũng như lớp các phụ thuộc Boole dương trị nói riêng . Nhờ định lý tương đương vàniê các công thức ở dạng chuẩn tắc ta có thể chứng minh một số kết quả một cách dễ dàng và ngắn gọn. Cũng dựa vào các công cụ đó chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu một số vấn đề khác liên quan đến các phép suy dẫn cũng như quan hệ Armstrong trong lớp các phụ thuộc Boole dương đa trị.

LỜI CẢM ƠN.

Tác giả xin chân thành cảm ơn:

PGS, TS Nguyễn Xuân Huy, PGS, PTS Đặng Huy Ruận đã đọc bài viết và cho những lời góp ý rất qúy báu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO.

1. Beeri C., Dowd M., Fagin R., and Statman R. On the Structure of Armstrong Relations for Functional Dependencies. J . ACM, 31, 1 (Jan. 1984), 30-46.
2. Berman J. and Blok W. J. Generalized Boole dependencies. Abstracts of AMS, 6 (1985), 163
3. Berman J. and Blok W. J. Positive Boole dependencies. Inf. Processing Letters, 27 (1988), 147-150.
4. Berman J. and Blok W. J. Equational dependencies. Manusrip (1990). Rockville, Md., 1983.
5. Nguyen Xuan Huy and Le Thi Thanh. Generalized Positive Boole Dependencies. J. Inform. Process. Cybernet. EIK 28 (1992) 6, 363-370.
6. Novikop P.X. Đại cương lôgic toán. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà nội, 1971. (Dịch nguyên bản từ tiếng Nga. Người dịch: Nguyễn Hữu Ngự, Đặng Huy Ruận)

7. Sagiv Y., Dolobel C., Parker D.S., and Fagin R. An Equivevalence Between Relation Database Dependencies and a Fragment of Propossitional Lôgic . J. ACM, 28, 3(1981), 435-453. Also a correction to this paper in J. ACM, 34, 4(1987), 1016-1018.

8. Vu Ngoc Loan, Nguyen Xuan Huy. A class of generalized logical dependencies in deductive data bases. Vietnam Fourth Informatics Week, Proceedings (1994), 195-203.

VNU. Jonrnal of science. Nat. sci. t. XI, n° 2-1995

ON NORMAL FORMS OF FORMULAS AND DEDUCTIONS IN THE CLASS OF MULTIVALUED POSITIVE BOOLEAN DEPENDENCIES

Vu Ngoc Loan

Department of Matematics

College of Natural Sciences. VNU

In this paper, a type of multi-valued logic and some of its properties are presented. On the basis of this logic, a class of multi-valued positive Boolean dependencies that is a generalization of some kinds of dependencies such as the equational dependencies, the generalizetion positive Boolean dependencies is introduced.

The main purpose of the paper is to develop the result which have been obtained from the class of Boolean dependencies introduced in several above papers, especially from the class of the generalized positive Boolean dependencies in [5,9]. By the help of Equavalence Theorem and the concept of formal forms of formulas, the paper presents some results on the reductions, which are generalizations of the previous results.

With the aid of the Equivalence Theorem of consequences in the world of all relations, the world of 2-tuple relation and propositional logic we can give necessary and sufficient condictions in the some subclass of formulas.