TÍNH CHẤT C(R) SUY RỘNG VÀ BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN TỔNG QUÁT ĐỐI VỚI ĐA THỨC CÁC TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI

Phạm Quang Hưng

Khoa Toán, Đại học khoa học tự nhiên, ĐHQGHN

Bài toán nội suy tổng quát và các bài toán giá trị biên đối với đa thức các toán tử khả nghịch phải đã được D.Przeworska - Rolewicz, Nguyễn Văn Mậu, W.Z. Karwowski đưa ra và nghiên cứu từ năm 1988. Các kết quả của các tác giả nói trên đều dựa trên tính chất c(R) của lớp toán tử ban đầu đã cho. Tuy nhiên không phải tất cả các toán tử ban đầu đều có tính chất c(R).

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm tính chất c(R) - suy rộng và sử dụng để giải bài toán giá trị biên tổng quát.

$$\sum_{k=0}^{N} D^k Q_k x = y , \qquad F_j D^k x = x_{jk},$$

trong đó $Q_o, \dots Q_{N-1} \in L_o(X)$, $Q_N = I$; $F_o ,\dots, F_{n-1}$ là các toán tử ban đầu có tính chất c(R) - suy rộng; $x_{jk} \in \ker D$ ($k \in I_j$, $j = 0, n - 1$).

1. Tính chất c(*R*) suy rộng

Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathcal{F}$ (ở đây $\mathcal{F} = R$ hoặc $\mathcal{F} = C$). L(X) là tập tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong không gian tuyến tính X. Ký hiệu

$$L_o(X) = \{ A \in L(X) : \text{dom } A = X \}.$$

Một toán tử $D \in L(X)$ được gọi là khả nghịch phải nếu $\exists R \in L(X)$, sao cho $I_m R \subset \text{dom } D$ và $DR = I$ trên dom R.

Nếu toán tử D là khả nghịch phải thì ta viết $D \in R(X)$. Nếu tồn tại một nghịch đảo phải $R \in L_o(X)$ thì ta viết $D \in R_o(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$. Ký hiệu :

$$\mathcal{F}_D = \{ F \in L_o(X) : FX = \ker D,\ F^2 = f \text{ và } \exists R \in \mathcal{R}_D : FR = 0\}$$

Mỗi toán tử $F \in \mathcal{F}_D$ sao cho $FR = 0$ đối với một $R \in \mathcal{R}_D$ được gọi là toán tử ban đầu của D tương ứng với R.

Ta có

$$\ker D^n = \{ \sum_{k=0}^{n-1} R^k z_k : z_o,\dots, z_{n-1} \in \ker D \},\ n \in N$$

Ký hiệu :

$P_n(R) = \text{lin}\,\{R^k z\ ;\ z \in \ker D, k = 0, \dots, n-1\}$.

Ta đã biết $P_n(R) = \ker D^n \Leftrightarrow \dim \ker D = 1$. Nói chung trong trường hợp tổng quát thì $P_n(R) \subsetneq \ker D^n$.

Định nghĩa 1 [2]. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là tính chất c(R), nếu tồn tại hằng số c_k sao cho

$$F_0 R^k z = c_k z, \quad \forall z \in \ker D,\ k \in \mathbb{N}.$$

Định lý 1 [2]. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Khi đó để mọi $F \in \mathcal{F}_D$ đều có tính chất c(R) điều kiện cần và đủ là $\dim \ker D = 1$.

Ta đã biết , nếu $\dim \ker D > 1$ thì không phải mọi toán tử ban đầu đều có tính chất c(R).

Định nghĩa 2. Cho $D \in R(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là có tính chất c(R) - suy rộng nếu như tồn tại bộ các không gian con $Z_1, \dots, Z_s$ của $\ker D$ sao cho

i) $$\ker D = \bigoplus_{j=1}^{s} Z_j,\ Z_j \neq \{0\}, \qquad (1)$$

$$Z_i \cap Z_j = \{0\},\ i \neq j;\ i, j = 1, \dots, s,$$

ii) Tồn tại các hằng số $c_{kj} \in F$ sao cho

$$F_0 R^k z_j = c_{kj} z_j,\ \forall z_j \in Z_j,\ k \in N. \qquad (2)$$

Nếu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất c(R) - suy rộng thì ta viết $F_0 \in c_G(R)$.

Bổ đề 1. $F_0 \in c_G(R)$ có tính chất c(R) khi và chỉ khi đối với $Z_j \subset \ker D$ tùy ý, tồn tại hằng số $c_k \in \mathcal{F}$ sao cho

$$F_0 R^k z_j = c_k z_j,\ \forall z_j \in Z_j,\ (j = 1, \dots, s).$$

Chứng minh

$\forall z \in \ker D$, $z_j \in Z_j$, $(j = 1, \dots, s)$, sao cho $z = z_1 + \dots + z_s$. Khi đó

$$F_0 R^k z = \sum_{j=1}^{s} F_0 R^k z_j = \sum_{j=1}^{s} c_k z_j = c_k \sum_{j=1}^{s} z_j = c_k z.$$

Từ bổ đề 1 ta thấy rằng $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất c(R) thì F_0 có tính chất c(R)- suy rộng.

Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng tồn tại $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất c(R)- suy rộng, nhưng không có tính chất c(R).

Ví dụ 1. Cho $X = C^2(IR)$, $D = \dfrac{d^2}{dt^2}$, $R = \int_o^t \int_o^s$. Một cơ sở của ker D là $\{1, t\}$, tức là $e_1(t) \equiv 1$, $e_2(t) \equiv t$.

Viết

$$(F_k x)(t) = x(0) + tx'(0) + \frac{1}{2}(1 + t)\, x''(k) + \frac{1}{2}(1 - t)\, x''(-k)$$

$$k = 1,2$$

Ta thấy rằng $F_k \in \mathcal{F}_D$, $\ker D = Z_1 \oplus Z_2$, ở đây $Z_1 = \mathrm{lin}\{e_1\}$, $Z_2 = \mathrm{lin}\{e_2\}$, và

$$F_k R^j e_1 = \frac{k^{2j-2}}{(2j-2)!} e_1$$

$$F_k R^j e_2 = \frac{k^{2j-1}}{(2j-1)!} e_2, \quad j = 1,2,...$$

Như vậy hệ $\{F_1, F_2\}$ có tính chất c(R) - suy rộng, nhưng không có tính chất c(R). (vì $(2j - 1)! \neq (2j - 1)!$ và do bổ đề 1).

2. Bài toán giá trị biên tổng quát.

Giả sử $D \in R(X)$. Hệ các toán tử ban đầu $F_o, ..., F_{n-1}$ có tính chất c(R) - suy rộng tương ứng với các bộ các không gian con $Z_1, ..., Z_s$ của ker D ($F_j \neq F_k$ với $j \neq k$).

Cho n tập hữu hạn I_j các số nguyên không âm $\# I_j = r_j$; $r_o + r_1 + ... + r_{n-1} = N$.

Xét toán tử

$$Q < D > = \sum_{k=0}^{N} D^k Q_k$$

trong đó $Q_o,..., Q_{N-1} \in L_o(X)$, $Q_N = I$.

Bài toán giá trị biên tổng quát đối với toán tử $Q < D >$ là : Tìm tất cả các nghiệm của phương trình

$$Q < D > x = y,\ y \in X,$$

Thỏa mãn các điều kiện

$$F_j D^k x = x_{jk}, \quad x_{jk} \in \ker D$$

$$(k \in I_j\ ; j = 0,1, ..., n - 1).$$

Theo giả thiết $F_o,..., F_{n-1}$ có tính chất c(R) - suy rộng. Khi đó ta có

$$F_j R^k z_v = c_{jkv} z_v, \qquad \forall z_v \in Z_v$$

$$(k \in IN\ ; \quad v = 1, ..., s; \quad j = 0,1, ...,n - 1).$$

Từ đó đối với mỗi $z_k \in \ker D$ $(k = 0,1, ..., n-1)$, ta có

$$F_jR^kz_k = F_jR^k \sum_{v=1}^{s} z_{kl} = \sum_{v=1}^{s} F_jR^k z_{kv} = \sum_{v=1}^{s} c_{jkv} z_{kv},$$

$$\forall z_{kv} \in Z_v, \quad v = 1,..., s; \quad k,j = 0,1, ..., n-1.$$

Ký hiệu $z_k := (z_{k1},...,z_{ks})^T$,

$$G_{Nv} := (c_{jkv})_{j,\, k = 0,...,\, N-1}, \quad v = 1,...,s.$$

$$G_N := \begin{pmatrix} G_{N1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_{Ns} \end{pmatrix} = \left(b_{jk}\right) \quad j,k=0,1,...,N-1$$

$$V_N := \det G_N.$$

Giả sử bài toán giá trị biên đối với toán tử $Q < D > = D^N$ là thiết lập đúng đắn, tức là bài toán

$$D^N x = y, \tag{5}$$

$$F_jD^kx = x_{jk} \tag{6}$$

$$(k \in I_j \;;\; j = 0,..., n-1)$$

có nghiệm duy nhất đối với mọi $y \in X$ và $x_{jk} \in \ker D$

Ta đã biết (xem trong [8] bài toán (5) - (6) có nghiệm duy nhất đối với mọi $y \in X$ và $x_{jk} \in \ker D$ với giả thiết.

$$V_N \neq 0 \tag{7}$$

và $B_jR^kz = b_{jk}z$, $\quad z \in \ker D$,

$$B_{r_0 + ... + r_{j-1} + m} = F_jD^{k_{jm}} \tag{8}$$

$$(m = 1,..., r_j; \quad j = 0,1,..., n-1).$$

Nghiệm của bài toán (5) - (6) viết dưới dạng

$$x = U_N (x_0,..., x_{N-1}),$$

Trong đó

$$x_{r_0 + ... + r_{j-1} + m} = x_{jk_{jm}},$$

$$(m = 1,..., r_j; \quad j = 0,1,..., n-1).$$

$$U_N(x_0,\dots,x_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} V_{Nj(R)x_j}, \qquad (10)$$

$$V_{Nj(t)} = \frac{1}{V_N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{k+j}V_{Nik(t)}.$$

$$(j = 0,1,\dots,N-1),$$

Và V_{Njk} là định thức con sinh bởi định thức V_N bằng cách gạch bỏ đi cột thứ k và hàng thứ j (k, j = [0,1],..., N - 1).

Định nghĩa 3. Giả sử $D \in R(X)$, các toán tử ban đầu $F_0, F_1,\dots, F_{n-1}$ có tính chất c(R) - suy rộng và $V_N \neq 0$, cho $B_0,\dots, B_{N-1}$ xác định bởi (8), toán tử G_N xác định như sau

$$G_N u = U_N(B_0u,\dots,B_{N-1}u), \text{ đối với } u \in \operatorname{dom} D^{N-1}. \qquad (11)$$

trong đó U_N xác định bởi (10).

Toán tử U_N được gọi là toán tử Green đối với toán tử D^N với điều kiện (6).

Bổ đề 2. Giả sử $F_0,\dots, F_{n-1}$ có tính chất c(R)- suy rộng, khi đó một phần tử $x \in$ dom D^N thỏa mãn điều kiện (4) khi và chỉ khi nó có dạng

$$x = (I - G_N)R^N u + U_N(x_0,\dots,x_{N-1}) \qquad (12)$$

Chứng minh bổ đề này giống như chứng minh hệ quả 3.3 trong [8].

Định lý 2. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn. Khi đó bài toán giá trị biên (3) - (4) tương đương với phương trình sau:

$$[I + (I - G_N)Q^0 < R >]x = yN, \qquad (13)$$

trong đó

$$Q < I,R > = I + Q^0 < R >;\ Q^0 < R > = \sum_{k=0}^{N-1} R^{N-k}Q_k; \quad (14)$$

$$yN = (I - G_N)R^N y + U_N(x_0,\dots,x_{N-1}). \qquad (15)$$

Chứng minh: Giả sử x là một nghiệm của bài toán (3) - (4). Viết :

$$u = Q < I,R > x$$

Ta có: $D^N u = D^N Q<I,R>x = Q<D>x = y$

và $B_i u = B_i(I+Q^0<R>)x = x_i + B_iQ^0<R>x\,(i=0,1,\dots,N-1)$. Do hệ quả 3.3 trong (8) khi đó u có dạng sau

$$u = (I-G_N)R^N y + U_N(x_o + B_o Q^o <R> x, \ldots, x_{N-1} + B_{n-1} Q^o <R> x) =$$
$$= (I-G_N)R^N y + U_N(x_o, \ldots, x_{N-1}) + G_N Q^o <R> x =$$
$$= yN + G_N Q^0 <R> x$$

Từ đó ta có : $Q < I,R > x = yN + G_N Q^0 < R > x$ hay

$$(I + Q^0 < R >)x = yN + G_N Q^0 < R > x,$$

$$\Leftrightarrow [I + (I - G_N) Q^0 < R >] x = yN$$

Do vậy x là nghiệm của phương trình (13)

Ngược lại, giả sử x là nghiệm của phương trình (13), khi đó theo giả thiết ta có

$$x = G_N Q^0 < R > x - Q^0 < R > x + yN \in \text{dom } D^N$$

và

$$Q < D > x = D^N Q < I,R > x = D^N [I + Q^0 < R >] x =$$
$$= D^N [G_N Q^0 < R > x + yN] =$$
$$= D^N [G_N Q^0 < R > x + (I - G_N) R^N y + U_N (x_0, \ldots, x_{N-1})]$$
$$= D^N R^N y = y$$

Do tính chất của toán tử Green, ta có $B_j x = x_j$ ($j = 0, \ldots, N-1$). Từ đó x thỏa mãn điều kiện (4).

Hệ quả 1: Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn. Viết

$$G^0_N < R > = (I - G_N) Q^0 < R > \qquad (16)$$

i) Nếu -1 là giá trị chính qui của toán tử $G^0_N < R >$, thì bài toán (3) -(4) là thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của nó là

$$x = [I + G^0_N < R >]^{-1} yN \qquad (17)$$

ii) Nếu -1 là một giá trị riêng của toán tử $G^0_N < R >$ thì bài toán (3) -(4) là thiết lập không đúng đắn. Bài toán có nghiệm khi và chỉ khi

$$yN \in [I + G^0_N < R >]X.$$

Nếu điều kiện này được thỏa mãn thì các nghiệm của nó có dạng $x = w+v$, trong đó $w \in \ker [I + G^0_N < R >]$ bất kỳ và v là một phần tử cố định bất kỳ của nghịch ảnh của phần tử yN bởi ánh xạ $I + G^0_N < R >$.

Định lý 3 [9]: Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa 3 được thỏa mãn và toán tử $Q < I,R >$ khả nghịch. Nếu toán tử

$$B = G_N [Q < I,R >]^{-1} |_{\ker D^N}$$

khả nghịch trên ker D^N thì toán tử $I + G^o_N < R >$ khả nghịch trên X.

Định lý 4 [9]: Giả sử tất cả các điều kiện của định lý 3 được thỏa mãn và toán tử Q< I,R > khả nghịch. Khi đó toán tử B khả nghịch trên ker D^N khi và chỉ khi hệ sau đây có nghiệm duy nhất $(z_0,..., z_{N-1})$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_i [Q<I,R>]^{-1} R^k zk = x_i - B_i [Q<I,R>]^{-1} yN \qquad (18)$$

$$(i = 0,1,..., N-1)$$

ở đây $z_0,..., z_{N-1} \in \ker D$, B_i xác định bởi (8).

Hệ quả 2: Giả sử tất cả các điều kiện của định lý 4 được thỏa mãn. Khi đó hệ (18) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi các toán tử:

$$\psi_i = B_i [Q < I,R >]^{-1}$$

(i = 0,1,..., N-1) độc lập tuyến tính trên ker D^N

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Przeworska - Rolewicz, Algebraic analysis, PWN - Polish Scientific Publishers, and D. Reidel Publ Company, Warszawa / Dordrecht / Landcaster / Tokyo 1988.

2. D. Przeworska - Rolewicz, Property (c) and interpolation formula induced by right invertible operators, Demonstratio Math; 21 (1988), 1023 - 1044.

3. D. Przeworska - Rolewicz, Linear boundary value problems for right invertible operators, Preprint 413, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warszawa 1988.

4. D. Przeworska - Rolewicz, Spaces of D - Paraanalytic elements, Dissertationes Math. No 302, Warszawa 1990.

5. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singula integral equations, Demonstratio Math. 23 (1990), 191 - 212.

6. Nguyen Van Mau, Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators, Dissertatioes Math., CCC XVI, Warszawa 1992.

7. Nguyen Van Mau and Pham Quang Hung, On a general classical interpolation problem, Journal of Science, special issue on Mathematics and Informatics, Hanoi University, 1993, 2 - 6.

8. W. Z. Karwowski and D. Przeworska - Rolewicz, Green operators for linear boundary value problems with a right invertible operators D^N, Math. Nachr. 152 (1991), 21 - 34.

9. W. Z. Karwowski and D. Przeworska - Rolewicz, General linear boundary value problems for polynomials invertible operators, Demonstratio Math. 25 (1992), 325 - 340.

VNU.Journal of science.Nat.sc.t-XI,n 2-1995

GENERALIZED C(R) - PROPERTY AND GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR POLYNOMIALS IN RIGHT INVERTIBLE OPERATORS

Pham Quang Hung

College of Natural Sciences, VNU.

The c(R) - property for initial operators induced by a given right inverse was introduced and applied to boundary value problems and general linear boundary value problems for polynomials in right invertible operator by D.Przeworska - Rolewicz, Nguyen Van Mau and W.Z.Karwowski. In this paper we introduce the generalized c - property and apply to solve the general boundary value problems

$$\sum_{k=0}^{N} D^k Q_k x = y, y \in X$$

$$F_j D^k x = x_{jk}, x_{jk} \in \ker D$$

$$(k \in I_j, j = 0, \ldots, n-1)$$