VNU. JOURNAL OF SCIENCE, Nat. Sci., t XV, n⁰5 - 1999

ESPACES $\left[W_{2,\alpha}^{(K)}(\Omega)\right]^M$ ET PROBLEME DE DIRICHLET-POISSON POUR UN SYSTEME DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ELLIPTIQUES D'ORDRE 2K

Vu Van Khuong

Institut de la Communication et des Transports de Hànoi

Cau Giay - Tu Liem - Ha Noi.

1. INTRODUCTION

Dans ce travail, on présente une méthode pour résoudre le problème de Dirichlet - Poisson pour un système des équations aux dérivées partielles elliptiques d'ordre $2k$.

Les suppositions faites ici sont celles utilisées dans la méthode variationnelle, partant la notion de trace. Le domaine considéré a la frontière lipchitzienne et les coefficients des équations sont bornés et mesurables.

On démontre ici l'existance d'une unique solution du problème de Dirichlet - Poisson dans l'espace $\left[W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$ lorsqu'on se donne sa trace sur la frontière.

La méthode de ce travail est très proche à celle de M. I. Vishik (cf. [2]), en appuant sur une génération du théorème de P.D.Lax - A. Milgram ([1]) (Supposant $|\alpha| < 1$).

2. TRACE DES VECTEURS DE $\left[W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$

On désigne par E_n, $n \geq 1$, l'espace euclidien avec les coordonées $[x_1, x_2, \dots, x_n] = X$. On dit d'un domaine borné Ω dans E_n, qu'il est du type $\mathcal{N}^{(0),1}$ (et on l'écrit $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$) si

1) Il existe m systèmes de coordonnées dans E_n et m fonctions a_r de sorte qu'on peut présenter tout point de la frontière sous la forme:

$$[x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_{n-1}}, a_r(x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_{n-1}})], \text{ en bref } [X_r, a_r(X_r)].$$

Les fonctions a_r satisfont à la condition de Lipschitz dans la boule $\Delta_r = |X_r| < \alpha$, c. à. d.

$$|a_r(X_r) - a_r(Y_r)| \leq c|X_r - Y_r| \quad \text{pour } X_r, Y_r \in \Delta_r.$$

2) il existe un nombre $\beta \geq 1$ tel que les points $[X_r, x_{rn}]$, $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) - \beta < x_{rn} < a_r(X_r)$ sont à l'intérieur de Ω, tandis que les points $[X_r, x_{rn}]$, $|X_r| < \alpha$, $a_r(X_r) < x_{rn} < a_r(X_r) + \beta$ sont à l'extérieur de Ω.

Désormais, on ne considère que les domaines du type $\mathcal{N}^{(0),1}$.

Nous pouvons démontrer que les vecteur de $\left[W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$ ont des traces. C'est le contenu du théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit* $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}, 0 \leq \alpha \leq p-1$. *Alors il existe une et une seule transformation linéaire et continue* Z *de* $\left[W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$ *dans* $[L_p(\partial\Omega)]^M$ *telle qu'on ait* $Z(u) = u,\ \forall u \in [\mathcal{E}(\Omega)]^M$.

3. THEOREME D'IMMERSION DE SOBOLEV

En utilisant les théorèmes d'immersion de Sobolev (cf. par exemple ([5], [8], [9]), on peut démonstrer facilement les théorèmes suivant:

Théorème 3.1. *Soit* $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1},\ 0 \leq \alpha < p-1,\ 1 \leq q < \dfrac{p}{1+\alpha}$. *on a alors*

$$\left[W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M \subset \left[W_q^{(k)}(\Omega)\right]^M.$$

Nous dirigeons maintenant notre intérêt vers les théorèmes d'immersion du type

$$\left[W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M \subset \left[W_{p,\alpha-p}^{(k)}(\Omega)\right]^M$$

qui jouera un rôle principal dans ce qui va suivre en appuyant sur les inégalités de Hardy (cf. G. H. Hardy, G. Polya [6], C. Muzoxata [9]). On désigne par $[L_{p,loc}(\Omega)]^M$ l'espace des fonctions vecteurielles, dont leurs composants sont de p-ieme puissance sommable sur chaque compact contenu dans Ω.

Théorème 3.2. *Soient* $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1},\ u \in [L_{p,loc}(\Omega)]^M,\ p > 1,\ 0 \leq \alpha,\ \dfrac{\partial u^r}{\partial x_i} \subset L_{p,\alpha}(\Omega),\ i = \overline{1,n},\ r = \overline{1,M}$ *(dérivées au sens des distributions), alors* $u \in [L_{p,\alpha-p}(\Omega)]^M$ *si* $\alpha > p-1$, *c.à.d.* $u \in [L_{p,-1+\epsilon}(\Omega)]^M$, *où* $\epsilon > 0$ *est arbitrairement petit. Les immersions du* $[L_{p,loc}(\Omega)]^M$ *dans* $[L_{p,\alpha-p}(\Omega)]^M$ *sont continues.*

Théorème 3.3. *Soit* $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1},\ \alpha < p-1$ *On a alors*

$$\left[W_{p,\alpha}^{0(k-l)}(\Omega)\right]^M \subset \left[W_{p,\alpha-lp}^{0(k)}(\Omega)\right]^M, \quad 1 \leq l \leq k.$$

4. INEGATLITES FONDAMENTALES POUR LES OPERATEURS ELLIPTIQUES.

On considère dans la suite M opérateurs différentiels de la forme

$$A^{rq} = \sum_{|i|,|j| \leq k} (-1)^{|i|} D^i \left(a_{ij}^{rq} D^j\right), \tag{4.1}$$

$$Du = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & \dots & A^{1M} \\ A^{21} & A^{22} & \dots & A^{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{M1} & A^{M2} & \dots & A^{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^M \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

où i, j sont des vecteurs $i = (i_1, i_2, \dots, i_n), j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ avec composants entiers, non négatives

$$|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n, \quad |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n,$$

$$0 \leq |i| \leq k, \quad 0 \leq |j| \leq k, \quad k \geq 1$$

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \dots \partial_{x_n}^{i_n}}.$$

a_{iq}^{rq} sont des fonctions mesurables, bornées. On fait corréspondre au système (4.2) une forme bilinéaire de la forme

$$B(v, u) = \int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M} \sum_{|i|,|j| \leq k} a_{ij}^{\overline{rq}} D^i v^r \overline{D^j u^q} dx. \tag{4.3}$$

On dit que le système (4.2) est elliptique pour le problème de Dirichlet - Poisson si l'on a

$$|B(\varphi, \varphi)| \geq c|\varphi|^2_{[w_2^{(k)}(\Omega)]^M}, \quad \forall \varphi \in [D(\Omega)]^M. \tag{4.4}$$

On a maintenant le théorème suivant, qui a un rôle important pour le présent travail.

Théorème 4.1. *Suppose que le système (4.2) soit elliptique. Le plus grand intervalle (ouvert, fermé, semiouvert) J des $\alpha < 1$ tels qu'on ait*

$$|B(\psi, \varphi)| \geq c(\alpha)|\varphi|_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}, \quad \forall \varphi \in [D(\Omega)]^M, \tag{4.5}$$

où ψ est un vecteur convenablement choisi de $[D(\Omega)]^M$, $|\psi|_{[w_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M} = 1$ est non vide et contient un voisinage de 0. Le plus grand intervalle J^* des $\alpha > -1$ tels qu'on ait

$$|B(\varphi, \psi^*)| \geq c^*(\alpha)|\varphi|_{[w_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M} \quad \forall \varphi \in [D(\Omega)]^M, \tag{4.6}$$

où $\psi^* \in [D(\Omega)]^M$, convenablement choisi, $|\psi^*|_{[w_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M} = 1$ est non vide et contient un voisinage de 0. Si $B(\psi, \varphi) = \overline{B(\varphi, \psi)}$, alors $\inf J = -\sup J^*$, $\sup J = -\inf J^*$.

Demonstration: Nous esquissons de démonstration:
On pose $\psi = \varphi\sigma^\alpha$, où σ est la fonction ayant les propriétés suivantes (cf. [8])

$$c_1\rho(x) \leq \sigma(x) \leq c_2\rho(x)$$

$$\left| \frac{\partial^{|i|}\sigma(x)}{\partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \dots \partial_{x_n}^{i_n}} \right| \leq \frac{c(i)}{[\sigma(x)]^{i-1}}$$

on a

$$B(\psi,\varphi)=\int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M}\sum_{|i|,|j|\le k}\overline{a_{ij}^{rq}}D^i(\varphi^r\sigma^\alpha)\overline{D^j\varphi^q}dx$$

$$=\int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M}\sum_{|i|,|j|\le k}\overline{a_{ij}^{rq}}D^i(\varphi^r\sigma^{\frac{\alpha}{2}})D^j(\overline{\varphi^q}\sigma^{\frac{\alpha}{2}})dx+B_\alpha, \tag{4.7}$$

où

$$B_\alpha=\int_\Omega \overline{a_{ij}^{rq}}\left[D^i(\varphi^r\sigma^\alpha)\overline{D^j\varphi^q}-D^i(\varphi^r\sigma^{\frac{\alpha}{2}})D^j(\overline{\varphi^q}\sigma^{\frac{\alpha}{2}})\right]dx.$$

on a démontré que

$$|B_\alpha|\le|\alpha|a|\varphi|^2_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}.$$

En vertu d'éllipticité du système, le premier terme du second membre de (4.7) peut être apprécié comme suite

$$\left|\int_\Omega \sum_{r,q=1}^{M}\sum_{|i|,|j|\le k}\overline{a_{ij}^{rq}}D^i(\varphi^r\sigma^{\frac{\alpha}{2}})D^j(\overline{\varphi^q}\sigma^{\frac{\alpha}{2}})dx\right|\ge c_1|\varphi\sigma^{\frac{\alpha}{2}}|^2_{[w_2^{(k)}(\Omega)]^M}.$$

En appuyant sur le théorème 3.3 on est amené à l' inégalité:

$$|\varphi\sigma^\alpha|^2_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}\le|\varphi|^2_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}-c_2|\alpha||\varphi|^2_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M},$$

d'où on obtient

$$|B(\psi,\varphi)|\ge(c_1-c_1c_2|\alpha|-a|\alpha|)|\varphi|^2_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}.$$

On a finalement

$$\frac{|B(\psi,\varphi)|}{|\psi|_{[w_{2,-\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}}\ge\frac{c_1-c_1c_2|\alpha|-a|\alpha|}{(1+c_3|\alpha|)^{\frac{1}{2}}}|\varphi|_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M}.$$

En posant $|\alpha|<\dfrac{c}{c_1c_2+a}$ on obtient (4.5). La démonstration (4.6) est analogue si l'on pose $\psi^*=\varphi\sigma^{-\alpha}$. On achève par lè la démonstration du théorème (4.1). ◇

5. PROBLEME DE DIRICHLET-POISSON

On désigne par $\left[w_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)\right]^M$ l'espace des vecteurs fonctionnelles sur $\left[w_{2,\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M$. f étant de $\left[w_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)\right]^M$. On écrit formellement $f(v)=(v,f)$.

Soit $u_0\in\left[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$. Pour $u\in\left[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$ on dit $Du=f$ si $\forall v\in[D(\Omega)]^M$ on a

$$B(v,u)=(v,f). \tag{5.1}$$

On dit que u a les mêmes valeurs frontières que u_0, si

$$u-u_0\in\left[w_{2,\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M \tag{5.2}$$

On dit que $u\in\left[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$ résout le problème de Dirichlet-Poisson $Du=f$ sur Ω, $u=u_0$ sur $\partial\Omega$ si (5.1), (5.2) ont lieu. On a démontré le théorème suivant:

Théorème 5.1. *Soit $\Omega \in \mathcal{N}^{(0),1}$. Soit D un opérateur elliptique, $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha \in J$ (J est l'intervalle déterminée dans le théorème (4.1), $u_0 \in [w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M$, et $f \in \left[w_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)\right]^M$ Alors il existe exactement une solution $u \in \left[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)\right]^M$ du problème de Dirichlet - Poisson et l'on a*

$$|u|_{w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)^M} \leq c\left[|u_0|_{[w_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M} + |f|_{[w_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)]^M}\right] \tag{5.3}$$

Démonstration: La forme bilinéaire (4.3) vérifie toutes les conditions du théorème généralisé de P.D. Lax et de A.Milgram (cf. par exemple ([1])), si l'on pose

$$H_1 = \left[w_{2,-\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M, \quad H_2 = \left[w_{2,\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M$$

On définit $(\, , \,)_{H_1}, (\, , \,)_{H_2}$ par

$$(u,v) = \sum_{r=1}^{M}\left(\int_\Omega \sum_{|i|\leq k} D^i v^r \overline{D^i u^r} \rho^\alpha dx\right).$$

D'où, on obtient une transformation linéaire et continue Z de H_2 dans H_1, telle qu'on ait $B(v,u) = (v, Z(u))_{H_1}$. On a $\overline{Z(H_2)} = H_1$. En effet, soient $h \in H_1$ et $h_k \to h$ dans $H_1, h_k \in [D(\Omega)]^M$. La fonctionnelle $(v, h_k)_{H_1}$ peut être prolongée en une fonctionnelle sur $\left[w_2^{0(k)}(\Omega)\right]^M$. En vue de l'éllipticité de l'operateur D, il existe un vecteur fonctionnel (cf. [8]) u_k de

$$\left[w_2^{0(k)}(\Omega)\right]^M \subset \left[w_{2,\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M$$

pour lequel $B(v, u_k) = (v, h_k)_{H_1}$. On a alors $Z(u_k) \to h$. Du théorème de Lax et de Milgram et de $\overline{Z(H_2)} = H_1$ on obtient un vecteur unique $w \in \left[w_{2,\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M$ tel qu'on ait

$$B(v,w) = (v,g) \quad \forall v \in \left[w_{2,\alpha}^{0(k)}(\Omega)\right]^M,$$

$$g \in \left[w_{2,\alpha}^{(-k)}(\Omega)\right]^M. \text{ où} g = f - \sum_{|i|\leq k}(-1)^{|i|}D^i(a_{ij}^{rq}D^j u^q).$$

En posant $u = u_0 + w$, on obtient l'existance et l'unicité de la solution. Le théorème est démonstré. ◇

LITTÉRATURE

1. L . Nirenberg. *Remarks on trangly elliptic partial différential équationns*, **Vol VIII**(1995), 649 - 675.
2. M . L . Višik. O pervoj krajevoj zadaę dla ellip tięskich éuravnén nij v novoj funkcionalnoj poslanovsk, *Doklady akadén mii Nauk SSSR* **107**(1956), 781 - 784.

3. A. E. Shishkov. Existance des solutions régulières du probléme de Dirichlet-Poisson des équations aux dérivées partielles elliptiques, *AH. YCCP.* N^0 **1**(1979), 30 - 33.
4. . S. G. michlon. *Équations linéaires aux dérivées partielles.* Éditions Mir, Moscow 1977.
5. E . Gaglolardo. Propriéta di alame classi di funjioni in pià variabili. *Ricerche di Matemation* **Vol. VII** (1958), 102 - 137.
6. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya. *Inéquation* 1934 .
7. J. Deny, J. L. Lions. Les espaces du type de Beppolevi, *Annales de l'Institute Fouriver* **V** (1953 - 1954), 305 - 370.
8. J . Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique voisine de la variationnelle, *Ann. Sup. Pisa* **16** (1962).
9. S. Mizochata. *Théorie des équations aux dérivées partielles.* Éditions Mir, Moscou 1980

TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐHQGHN, KHTN, t.XV, n^{0}5 - 1999

KHÔNG GIAN $[W_{2,\alpha}^{(K)}(\Omega)]^M$ VÀ BÀI TOÁN DIRICHLET - POISSON CHO HỆ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG ELLIPTIC CẤP $2K$

Vũ Văn Khương

Viện Giao thông Vận tải, Cầu Giấy, Từ Liêm, Hà Nội

Bài báo này sẽ trình bày một phương pháp để giải bài toán biên Dirichlet - Poisson đối với hệ của các phương trình đạo hàm riêng loại ellip bậc 2k.

Các giả thiết được nêu ra ở đây thường được sử dụng trong phương pháp biến phân. Miền được khảo sát có biên Lipchit, còn các hệ số trong các phương trình đạo hàm riêng là giới nội và đo được.

Ý tưởng chính bài báo đã dựa vào sự mở rộng của định lý P.D. Lax, A. Milgram (xem L. Nirenberg [1]) và nhờ nó ta có thể tiếp cận rất gần với ý tưởng của M.I. Vishik, ông đã giải quyết bài toán tương tự như bài toán đặt ra ở đây. Vì vậy, sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán Dirichlet - poisson trong không gian $[W_{2,\alpha}^{(k)}(\Omega)]^M$ được chứng minh.