TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI. SỐ 4, 1987

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN TƯƠNG ĐƯƠNG TỔNG QUÁT DƯỚI DẠNG HỎI ĐÁP

ĐỖ ĐỨC GIÁO, VŨ NGỌC LOÃN
NGUYỄN ĐÌNH THUYẾT

1. Mô hình lý thuyết đồ thị quá trình tính toán và cây tính toán.

Ký hiệu N — tập các số tự nhiên; $P(N)$ — tập tất cả các tập con của tập N; X — tập hữu hạn khác rỗng các phần tử nào đó; Y — tập các Documents.

Một ánh xạ $\beta : X \to P(N)$ gọi là ánh xạ không đơn định từ tập X vào tập $P(N)$.

Nếu $\forall x \in X$ mà $\beta(x)$ hữu hạn thì β gọi là ánh xạ không đơn định hữu hạn giá trị.

Đặt $\rho_\beta = \max\limits_{x \in X} \{ \cup \beta(x) \}$ và $B = \{ \beta / \beta : X \to P(N) \}$

$Y^+ = Y \cup \{ w \}, \; w \notin Y.$

Trên bộ $[B, Y^+]$ ta định nghĩa cây tính toán như sau:

Định nghĩa: 1) Mỗi $y \in Y^+$ gọi là một cây

2) Giả sử $\beta \in B$ và $T_1, \dots, T_{\rho_\beta}$ là các cây khi đó dãy kí hiệu $\beta < T_1, \dots T_{\rho_\beta} >$ cũng là một cây.

TREE $[B, Y^+]$. tập tất cả cây định nghĩa như trên.

Định nghĩa: Hàm kết quả $\underset{B}{\mathrm{Rech}}$: TREE $(B, Y^+) \times X \to P(N)$.

1) $\mathrm{Rech}_B (y, x) = \{ y \}. \; \forall y \in Y^+, \forall x \in X.$

2) $\mathrm{Rech}_B (\beta < T_1 \dots T_{\rho_\beta} >, x) = \bigcup\limits_{S \in \beta(x)} \mathrm{Rech}_B (T_S, x).$

Định nghĩa: $T_1, T_1 \in$ TREE (B, Y^+)

T_1 tương đương với T_2 (kí hiệu $T_1 \underset{X,B}{\approx} T_2$) $\overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow}$

$\mathrm{Rech}_B (T_1, x) = \mathrm{Rech}_B (T_2, x) \; \forall x \in X.$

Bài toán: Hãy xây dựng thuật toán để sau một số hữu hạn bước làm việc thuật toán cho biết T_1, T_2 trong TREEE (B, Y^+) có tương đương với nhau không?

Trong bài báo này chúng ta giải quyết bài toán trên bằng phương pháp tiên đề hóa.

2. Lớp các cây được thành lập bằng cách ghép nối tiếp các cây nhị nguyên.

X, Y là các tập được cho như trong phần 1.

Đặt $A = \{ b / b : X \to \{0,1\} \}$;

$V = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) / b_j \in A, j = \overline{1n}, n \geq 1\}$.

$\forall x \in X$ ta định nghĩa $(b_1, b_2, \ldots, b_n(x)) (b_1(x), b_2(x), \ldots b_n(x))$.

Ta định nghĩa cây ghép trên bộ $[V, Y^+]$ như sau :

Định nghĩa : 1) Mỗi $y \in Y^+$ gọi là một cây.

2) Giả sử $(b_1, \ldots, b_n) \in V$ và $T_1, \ldots, T_n$

là các cây. Khi đó $(b_1, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_n >$ cũng là một cây.

TREE (V, Y^+) — tập tất cả các cây định nghĩa như trên.

Định nghĩa: Hàm kết quả $Rech_V$: TREE $(V, Y^+) \times X \rightarrow P(N)$

1) $Rech_V(y, x) = \{y\}$, $\forall y \in Y^+, \forall x \in X$.

2) $Rech_V((b_1, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_n >, x) = \bigcup\limits_{b_j(x) = 1} Rech_V(T_j, x)$

Định nghĩa: $T_1, T_2 \in$ TREE (V, Y^+)

T_1 tương đương T_2 (kí hiệu $T_1 \underset{X,V}{\approx} T_2$) $\Leftrightarrow Rech_V(T_1, x) \overset{}{\underset{dn}{=}} Rech_V(T_2, x) \forall x \in X$.

3. Quan hệ giữa hai tập TREE (B, Y^+) và TREE (V, Y^+).

Định lí 1: Có tồn tại ánh xạ $\phi(\psi)$ từ tập TREE (B, Y^+) vào tập TREE (V, Y^+) (từ tập TTEE (V, Y^+) vào tập TREE (B, Y^+)) có các tính chất sau đây :

a) $\phi(\psi)$ là ánh xạ đơn trị.

b) $\forall T \in$ TREE (BY^+) ($\forall T' \in$ TREE (V, Y^+)) ta luôn có $Rech_B(T, x) =$

$= Rech_V(\phi(T), x) \; \forall x \in X$.

$(Rech_V(T', x) = Rech_B(\psi(T'), x) \; \forall x \in X)$.

c) $\forall T_1, T_2 \in$ TREE (B, Y^+) ($\forall T'_1, T'_2 \in$ TREE (V, Y^+))

Ta có :

$$T_1 \underset{X,B}{\approx} T_2 \Leftrightarrow \phi(T_1) \underset{X,V}{\approx} \phi(T_2)$$

$$T'_1 \underset{X,V}{\approx} T'_2 \Leftrightarrow \psi(T'_1) \underset{X,B}{\approx} \psi(T'_2)).$$

Chứng minh :

Ta chỉ ra sự tồn tại của ϕ (còn sự tồn tại của ψ được chỉ ra tương tự).

Với mỗi $\beta \in B$ ta ứng với phần tử $(b_1, \ldots, b_n) \in V$ như sau :

Giả sử $\beta(x) = \{m_1, \ldots, m_k\}$ với $m_1 < m_2 \ldots m_k \leqslant \rho_\beta(x)$

Với $\beta(x)$ như vậy ta cho ứng với bộ $(b_1(x), \ldots, b_{m_1}(x), \ldots, b_{m_k}(x), \ldots b_{\rho_\beta}(x))$

$\in V$, ở đây

$$b_j(x) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } j \in \beta(x) \\ 0, \text{ nếu } j \notin \beta(x) \end{cases}$$

Tiếp theo chúng ta định nghĩa ánh xạ ϕ : TREE $(B, Y^+) \rightarrow$ TREE (V, Y^+) như sau :

1) $\phi(y) = y$, $\forall y \in Y^+$.

2) $\phi(\beta < T_1 \ldots T_{\rho_\beta} >) = (b_1, \ldots, b_{m_1}, \ldots b_{m_k}, \ldots, b_{\rho_\beta}) < \phi(T_1) \ldots \phi(T_{\rho_\beta})) >$

Dễ thấy ánh xạ f định nghĩa như trên sẽ thỏa mãn các điều kiện a/, b/, c/ trong định lý 1.

4. Thuật toán giải bài toán tương đương trên lớp TREE (V, Y^+)

Hai cây bất kỳ T_1 và $T_2 \in$ TREE (V, Y^+) được nối với nhau bởi ký hiệu « = » được gọi là một phương trình cây.

Kí hiệu EQU $= \{T = T' / T, T' \in$ TREE $(V, Y^+)\}$.

Giả sử $X \subseteq$ EQU và $T_1 = T_2 \in$ EQU.

Phương trình cây $T_1 = T_2$ gọi là dẫn được từ tập X khi và chỉ khi hoặc $T_1 = T_2 \in X$ hoặc nó nhận được từ các phần tử trong X bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các qui tắc dẫn xuất sau đây:

Qui tắc 1: Nếu $T \in$ TREE (V, Y^+) thì $X \vdash T = T$.

Qui tắc 2: Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ thì $X \vdash T_2 = T_1$.

Qui tắc 3: Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ và $X \vdash T_2 = T_3$ thì $X \vdash T_1 = T_3$.

Qui tắc 4: Nếu $X \vdash T = T'$ và $X \vdash (b_1, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_n > =$

$= (b_1, \ldots, b_n) < T'_1, \ldots, T'_n >$ thì $X \vdash (b_1, \ldots b_n) < T_1, \ldots, T_{i-1}, T,$

$T_{i+1}, \ldots, T_n > = (b_1, \ldots, b_n) < T'_1, \ldots, T'_{i-1}, T', T'_{i+1}, \ldots, T'_n >$.

Qui tắc 5: Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ thì $X \vdash (b) < T_1 > = (b) < T_2 >$ $\forall b \in A$.

Qui tắc 6: Nếu $X \vdash (b_1, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_n > = (b'_1, \ldots b'_m)$

$< T'_1, \ldots T'_m >$ thì $X \vdash (b_1, \ldots, b_n, b) < T_1, \ldots, T_n, T > = (b'_1, \ldots, b'_m$

$, b) < T'_1, \ldots, T'_m, T >$ $\forall b \in A$, $\forall T \in$ TREE (V, Y^+).

Quy tắc 7: Nếu $X \vdash (b_1, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_n > = (b'_1, \ldots, b'_m) < T'_1, \ldots T'_m >$ thì

$X \vdash (b, b_1, \ldots, b_m) < T, T_1, \ldots, T_n > = (b, b'_1, \ldots, b'_m) < T, T'_1, \ldots, T'_m) >$, $\forall b \in A$,
$\forall T \in$ TREE (V, Y^+).

Quy tắc 8: Nếu $X \vdash (b_1, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_n > = (b'_1, \ldots, b'_m) < T'_1, \ldots, T'_m >$ thì

$X \vdash (b_1, \ldots, b_{i-1}, b, b_{i+1}, \ldots, b_n) < T_1, \ldots, T_{i-1}, T, T_{i+1}, \ldots, T_n > = (b_1, \ldots b_{i-1},$

$b, b_{i+1}, \ldots, b'_m) < T'_1, \ldots, T'_{i-1}, T, T'_{i+1}, \ldots, T'_m >$, $\forall b \in A$, $\forall T \in$ TREE (V, Y^+)

Ta gọi các phương trình cây sau đây là các tiên đề.

Tiên đề 1 (ax_1): $y = y$, $\forall y \in Y^+$.

Tiên đề 2 (ax_2): $(b, b) < y, y > = (b) < y >$, $\forall b \in A$. $\forall y \in Y^+$.

Tiên đề 3 (ax_3): $(b) < (b) < y \gg = (b) < y >$, $\forall b \in A$. $\forall y \in Y^+$.

Tiên đề 4 (ax_4): $(b_1, b_2) < y_1, y_2 > = (b_2, b_1) < y_2, y_1 >$, $\forall b_1, b_2 A$.

Tiên đề 5 (ax_5): $(b_1) < (b_2) < y \gg = (b_2) < (b_1) < y \gg$, $\forall b_1, b_2 A$, $\forall y \in Y^+$.

Tiên đề 6 (ax_6): $(b) < (b_1, b_2) < y_1, y_2 \gg = (b, b) < (b_1) < y_1 >,$
$(b_2) < y_2 \gg$ $\forall b_1, b_2, b \in A$, $\forall y_1, y_2 \in Y^+$

Tiên đề 7 (ax_7): $(\bar{b}) < (b) < y \gg = w$, $\forall b, \in A$, $\forall y \in Y^+$, *Tiên đề* 8 (ax_8) : $\overline{\ }(b, b) < y, y > = y, \forall b \in A, \forall y \in Y$.

Đặt $ax = \bigcup_{i=1}^{8} ax_i$

5. **Dạng chuẩn tắc.**

Định nghĩa : Cây $E \in TREE(V, Y^+)$ được gọi là cây cơ sở có thứ tự ứng với bộ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nếu và chỉ nếu E có dạng sau :

$E \equiv (b_1^{\sigma_1}) < (b_2^{\sigma_2}) < \ldots < (b_n^{\sigma_n}) < y > \ldots >$ với $b_i^{\sigma_i} \leqslant b_{i+1}^{\sigma_{i+1}}$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ở đây

$$b_i^{\sigma_i} = \begin{cases} b_i, & \text{nếu } \sigma_i = 1 \\ \overline{b}_i, & \text{nếu } \sigma_i = 0 \end{cases}$$

Kí hiệu $T \equiv T'$ có nghĩa là T đồng nhất bằng T'.

Định nghĩa :

$N \in TREE(V, Y^+)$ gọi là cây chuẩn ứng với bộ $(b_1, \ldots, b_n)$ nếu và chỉ nếu hoặc $N \equiv y$, hoặc có tồn tại $m (m \geqslant 1)$ cây cơ sở có thứ tự $E_1, E_2, \ldots, E_m$ ứng với bộ $(b_1, \ldots, b_n)$ với $E_i \not\equiv E_j$ $(i \neq j)$ sao cho

$N \equiv (b_1^{\sigma_1^1}, \ldots, b_1^{\sigma_1^m}) < (b_2^{\sigma_2^1}) < \ldots < (b_n^{\sigma_n^1}) < y_1 > \ldots \ldots (b_2^{\sigma_2^m}) \ldots (b_n^{\sigma_n^m})$

$< y_m > \ldots >$, ở đây

$E_i \quad (b_1^{\sigma_1^i}) < b_2^{\sigma_2^i}) \ldots < (b_n^{\sigma_n^i}) < y_i > \ldots, >, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Định lý 2 :

Giả sử N_1 và N_2 là hai cây chuẩn ứng với các bộ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ và

$(b'_1, b'_2, \ldots, b'_m)$.

Nếu $N_1 \underset{X,V}{\approx} N_2$ thì $N_1 \equiv N_2$

Chứng minh : Dùng phương pháp phản chứng.

Định lý 3 :

Với mỗi cây bất kỳ $T \in TREE(V, Y^+)$, có tồn tại duy nhất một cây chuẩn N ứng với bộ $(b_1, \ldots, b_n)$ (chỉ số n phụ thuộc ở cây T) sao cho

a) $T \underset{X,V}{\approx} N$

b) $ax \vdash T = N$

Chứng minh : Dùng phương pháp quy nạp theo định nghĩa của T.

6. **Tính phi mâu thuẫn và tính đầy đủ của hệ ax. Thuật toán giải bài toán tương đương trên lớp TREE (B, Y⁺)**

Định lý 4 : Với mọi cây bất kỳ $T_1, T_2 \in TREE(V, Y^+)$ ta có

$T_1 \underset{X,V}{\approx} T_2$ khi và chỉ khi $ax \vdash T_1 = T_2$.

Chứng minh.

a) Nếu $ax \vdash T_1 = T_2$ thì $T_1 \underset{X,V}{\approx} T_2$. Mệnh đề này được suy ra từ việc kiểm tra lại các tiên đề đều được chọn từ các cây tương đương nhau và các quy tắc dẫn xuất lại bảo toàn tính tương đương đó.

b) Nếu $T_1 \approx T_2$ thì $aX \vdash_{X, V} T_1 = T_2$. Mệnh đề này được suy ra từ áp dụng các định lý 2 và 3.

Thuật toán. (Giải bài toán tương đương trên TREE (B, Y^+)).

Cho $T_1, T_2 \in$ TREE (B, Y^+)

Để kiểm tra xem T_1 có tương đương với T_2 hay không, ta xét các cây $\Phi(T_1)$ và $\Phi(T_2)$ trong lớp TREE (V, Y^+).

Đối với $\Phi(T_1)$, $\Phi(T_2)$ ta đã có thuật toán để kiểm tra sự tương đương của nó và từ đó cũng cho ta kết luận T_1 có tương đương với T_2 trong TREE (B, Y^+) hay không.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. L. Henkin : The completeness of the first–order functional Caleulus. The journal of Symbolic logic 11, 159–166 (1949).

2. D. E. Knuth : The Art Computer Programming. Vol. 3, Sorting and Searching. Addison – wesely Publising Company 79.

3. H. Maurer, Th. Ottmann : Manipulating sets of points—a survey. Berichte zur praktiocher Informatik, Bd. 1979. S–9–29.

4. H. Thiele : On a gvaph –iheoretic realization of retrieval Systems using a funotional caleulus as basic. Language. Proceedings of the Colloque International du C. N. R. S. «Les développements récents de la theorie de L'information et leurs applications». E. N. S. E. T., Cachan, France, 4—5 juillet 1977.

5. H. Thiele : Ein Ansatz zur graphenthuoretischen Modellierung Von Recherche prezessen

Manuskript. Sektion Mathematik, Humboldt–Uni. zu Berlin, 1976.

6. Đỗ Đức Giáo : Ternary Seaech Trees.

3rd Symposium on Mathematical Foundation of Computer Science, Poland—GDR, zaborow, january, 21–26, 1980.

7. Đỗ Đức Giáo : Aquivaleute Umformungen n – dimensionaler ternaver Suchbaume.

Pusíikation im 1. Freundschaftakolloquiu (DDR – UdSSR), in Belin, 11–16, Februar, 1980.

8. Đỗ Đức Giáo. Tính phi mâu thuẫn và tính đầy đủ của hệ các tiên đề của lớp cây tam nguyên 1 chiều với tập ngôn ngữ và là tập hữu hạn các phần tử.

Thông báo khoa học khoa Toán cơ 1983, 61–70, ĐHTH Hà Nội.

9. Đỗ Đức Giáo. Tính phi mâu thuẫn và tính đầy đủ của các tiên đề của lớp cây tam nguyên n chiều với tập ngôn ngữ vào là tập hữu hạn các bộ gồm n phần tử.

Tạp chí khoa học (Toán – lý), 1985, 22–26, ĐHTH Hà Nội.

10. Đỗ Đức Giáo. Sự biến đổi tương đương của lớp cây nhị nguyên n chiều.

Tóm tắt báo cáo Hội nghị Toán học Việt Nam lần thứ 3 (22–25-7-1985).

11. Đỗ Đức Giáo. Vấn đề tối thiểu hóa hệ tìm kiếm thông tin. Vũ Ngọc Loãn. Tạp chí Khoa học – Toán – Lý, 1986 ĐHTH Hà Nội.

12. Đỗ Đức Giáo. Vấn đề biến đổi tương đương của lớp cây nhị nguyên một chiều.

(Tóm tắt báo cáo tại hội nghị khoa học Toán – Cơ – Tin học 1986, tổ chức ngày 9 và 10-10-1986 nhân kỷ niệm 30 năm thành lập trường ĐHTH Hà Nội)

До Дык Жао, Ву Нгок Лоан, Нгуен Динь Тхует

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЭВИВАЛЕНТНОСТИ В ВИДЕ ВОПРОСОВ И ОТВЕТОВ

В 1977 – 1978 предполагали графические модели вычислительных процессов и классификации информаций. В общем виде задача эквиваленности на классе этих моделей до тех пор пока ещё не решена.

На этой заметке мы предполагаем метод для решения этой задачи. На классе деревьев, построенных из двоичных деревьев, при помощи аксиоматического метода мы посмотрим алгорифи, который после конечного числа шагов работы даёт нам ответ на вопрос о эквивалентности двух любых рассматриваемых моделей.

Do Đưc Giao, Vu Ngoc Loan, Nguyen Dinh Thuyet

A METHOD FOR SOLVING GENERAL EQUIVALENCE PROBLEM IM FORM OF QUESTIONS AND ANSWERS

In 1977 – 1978 some authors put forward graphical models in general fom of computation processes and classifying information. Equivalence problem on the class of those models has not been solved.

In this paper we present a metnod for solving that problem. By using a system of axians we have built an algorithm on the class of trees created by joining binary trees, which allows us to answer whether two any models are equivalent or not after a finite number of steps of transforming on those models.

Khoa toán – cơ – tin học
trường Đại học Tổng hợp Hà Nội

Nhận bài ngày 3-11-86