BIẾN THỂ CỦA PHƯƠNG PHÁP NGHIỆM ĐÀN HỒI TRONG LÝ THUYẾT QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG ĐÀN DẺO

G.S I ĐÀO HUY BÍCH

Phương pháp nghiệm đàn hồi [1] của lý thuyết biến dạng đàn dẻo nhỏ (đặt tải đơn giản) đưa việc giải bài toán của lý thuyết dẻo về giải một loạt các bài toán đàn hồi tuyến tính, thuần nhất đẳng hướng. Sự hội tụ của phương pháp đã được khảo sát trong công trình [2].

Ở đây đưa ra một phương pháp, biến thể của phương pháp nghiệm đàn hồi để giải bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp, nêu cơ sở chặt chẽ để thiết lập được phương pháp này cho lý thuyết quá trình biến dạng có độ cong trung bình và thuật toán tương ứng.

§ 1. Lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo

Lý thuyết quá trình biến dạng dẻo sử dụng giả thiết xác định địa phương có dạng [3]

$$d\bar{\sigma} = -\frac{\sigma_u f(\theta, s)}{\sin\theta}\, d\bar{\partial} + \left(\frac{\sigma_u'}{\cos\theta} + \frac{\sigma_u f}{\sin\theta}\right)\frac{\bar{\sigma} d\bar{\partial}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma}, \qquad (1.1)$$

trong đó f (θ,s) là hàm đặc trưng cho tính chất vectơ của vật liệu

$$\frac{d\theta}{ds} = f(\theta, s) \mp æ, \qquad (1.2)$$

còn σ_u' là hàm đặc trưng tính chất vô hướng của nó:

$$\sigma_u' \equiv \frac{d\sigma_u}{ds} = \Psi(\sigma_u, \theta, s) \qquad (1.3)$$

Trường hợp quá trình có độ cong trung bình [4] ta có

$$f(\theta, s) = -k(s)\sin\theta, \quad \sigma_u' = \Phi'(s)\cos\theta, \qquad (1.4)$$

trong đó $\Phi'(s) = \dfrac{d\Phi}{ds}$, Φ là đường cong tái bền của vật liệu, còn dạng của k(s) được xác định trong công trình [5].

Khi đó liên hệ ứng suất biến dạng (1.1) đưa về dạng

$$d\bar{\sigma} = \sigma_u k(s)\, d\bar{\partial} + [\Phi'(s) - \sigma_u k(s)]\,\frac{\bar{\sigma} d\bar{\partial}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma} \qquad (1.5)$$

hoặc là viết dưới dạng tenxơ

$$dS_{ij} = \frac{2}{3}\sigma_u k de_{ij} + (\Phi' - \sigma_u k)\frac{S_{kl}de_{kl}}{\sigma_u^2}S_{ij}; \tag{1.6}$$

hệ thức này đúng trong trường hợp tổng quát năm chiều, khi đó chỉ số i, j, k, l = 1, 2, 3.

Trường hợp đàn hồi hoặc cất tải

$$\text{Nếu } f(\theta, s) = -\frac{3G}{\sigma_u}\sin\theta,\ \sigma_u^{\bullet} = 3G\cos\theta; \tag{1.7}$$

tức là $k(s) = \dfrac{3G}{\sigma_u}$, $\Phi'(s) = 3G$, thì hệ thức (1.5) đưa về định luật Húc

$$d\bar{\sigma} = 3G\,d\bar{\varepsilon} \tag{1.8}$$

Ngược lại từ định luật Húc, ta cũng có thể nhận lại được các biểu thức (1.7)

Dựa vào kết quả (1.4) (1.7), ta viết liên hệ ứng suất — biến dạng (1.6) chung cho cả đàn hồi và dẻo, sự chuyển tiếp từ đàn hồi (hoặc cất tải) sang dẻo là hoàn toàn liên tục.

Kết quả này cho cơ sở đề đề xuất phương pháp gần đúng liên tiếp, biến thể của phương pháp nghiệm đàn hồi để giải bài toán biên của lý thuyết dẻo khi đặt tải phức tạp

Nhằm mục đích đó ta đặt

$$\sigma_u k = 3G(1-\omega_1), \quad \Phi' = 3G(1-\omega_2) \tag{1.9}$$

Khi đó $\omega_1(s) = 1 - \dfrac{\sigma_u k}{3G}$, $\omega_2(s) = 1 - \dfrac{\Phi'}{3G}$; với $S < S_0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$,

với $S \geqslant S_0$, $\omega_1 < 1$, $\omega_2 < 1$; vậy $0 \leqslant \omega_1 < 1$, $0 \leqslant \omega_2 < 1$.

Hệ thức (1. 6) đưa về dạng

$$dS_{ij} = 2Gde_{ij} - 2G\omega_1 de_{ij} + 3G(\omega_1 - \omega_2)\frac{S_{kl}de_{kl}}{\sigma_u^2}S_{ij} \tag{1.10}$$

Ký hiệu $\quad R_{ijkl} = -2G\omega_1\delta_{ik}\delta_{jl} + 3G(\omega_1 - \omega_2)\dfrac{S_{ij}S_{kl}}{\sigma_u^2}$

và tích phân hai vế (1.10) cho suốt quá trình đặt tải ta được

$$S_{ij} = 2Ge_{ij} + \int_0^t R_{ijkl}\dot{e}_{kl}\,dt. \tag{1.11}$$

Chia quá trình từ thời điểm ban đầu đến thời điểm đang xét thành n giai đoạn nhỏ, ta có thể viết (1.11) một cách gần đúng

$$S_{ij}^{(n)} = 2Ge_{ij}^{(n)} + \sum_{m=1}^{n}\int_{t_{m-1}}^{t_m} R_{ijkl}\dot{e}_{kl}\,dt.$$

Ước lượng tích phân

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} R_{ijkl}\, \dot{e}_{kl} dt = \langle R_{ijkl} \rangle^{(m)} \Delta e_{kl}^{(m)} = \Delta_m e_{ij},$$

trong đó

$$\langle R_{ijkl} \rangle^{(m)} = \frac{1}{2} (R_{ijkl}^{(m-1)} + R_{ijkl}^{(m-1)}).$$

Do vậy

$$S_{ij}^{(n)} = 2G e_{ij}^{(n)} + \sum_{m=1}^{n} \Delta_m e_{ij}. \tag{1.12}$$

Có thể viết (1.11) dưới dạng gia số. Tích phân (1.11) từ t_{n-1} đến t_n cho ta

$$\Delta S_{ij}^{(n)} = 2G \Delta e_{ij}^{(n)} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} R_{ijkl}\, de_{kl} = 2G \Delta e_{ij}^{(n)} + \Delta_n e_{ij} \tag{1.13}$$

§ 2. Biến thể của phương pháp nghiệm đàn hồi.

Bài toán biên của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo đặt ra như sau: cho vật thể chịu tác dụng của lực khối K_i, lực mặt F_i trên một phần biên và chuyển dịch u_{i_0} trên một phần biên, các đại lượng này phụ thuộc vào tham số đặc trưng cho quá trình, cần xác định chuyển dịch u_{i_0}, biến dạng ε_{ij}, ứng suất $б_{ij}$ thỏa mãn các phương trình

$$\frac{\partial б_{ij}}{\partial x_j} + \rho K_i = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad x \in \Omega \cup S,$$

$$S_{ij} = 2G e_{ij} + \int_0^t R_{ijkl}\, de_{kl} \quad x \in \Omega \cup S, \tag{2.1}$$

$$б = K\theta$$

$$б_{ij} n_j = F_i \qquad x \in S_б,$$

$$u_i = u_{i_0} \qquad x \in S_u,$$

$$S = S_б \cup S_u, \qquad S_б \cap S_u = \phi$$

Đây là bài toán biên phi tuyến. Để giải gần đúng ta chia quá trình đến thời điểm đang xét thành n giai đoạn nhỏ và lần lượt giải bài toán biên từ giai đoạn 1 đến giai đoạn n.

Chừng nào mà $\omega_1 = \omega_2 = 0$ vẫn còn bằng không ở giai đoạn đang xét, tức là $R_{ijkl} = 0$, thì hệ phương trình (2.1) là của bài toán biên lý thuyết đàn hồi tuyến tính, thuần nhất đẳng hướng; ta giả thiết bài toán đàn hồi này có nghiệm. Ghi nhận giai đoạn mà tương ứng với nó trong vật thể xuất hiện biến dạng dẻo ở một điểm nào đó. Bắt đầu từ thời điểm này ta phải giải bài toán phi tuyến (2.1). để giải nó ta dùng phương pháp gần đúng liên tiếp, biến thể của phương pháp nghiệm đàn hồi.

Thuật toán của phương pháp này như sau: biết giá trị nghiệm ở cuối giai đoạn $(n-1)$, tức là biết $\triangle_1 e_{ij}$, $\triangle_2 e_{ij}, \ldots, \triangle_{n-1} e_{ij}$, cần xác định các giá trị của nghiệm tại giai đoạn (n) thỏa mãn các phương trình (2.1), trong đó thay hệ thức (1.11) bằng hệ thức (1.12):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\sigma_{ij}^{(n)}}{dx_j} + \rho K_i^{(n)} = 0 && x \in \Omega \\
&\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_i^{(n)}}{dx_j} + \frac{du_j^{(n)}}{dx_i}\right) && x \in \Omega \cup S \\
&S_{ij}^{(n)} = 2G_{ij}^{(n)} + \sum_{m=1}^{n} \triangle_m e_{ij} && x \in \Omega \cup S \quad (2.2) \\
&\sigma^{(n)} = K\theta^{(n)} \\
&\sigma_{ij}^{(n)} n_j = F_i^{(n)} && x \in S_\sigma \\
&u_i^{(n)} = u_{io}^{(n)} && x \in S_u
\end{aligned}
$$

Chuyển hệ (2.2) về hệ phương trình xác định chuyển dịch ta được

$$
(\lambda + G)\frac{d\theta^{(n)}}{dx_i} + G\nabla^2 u_i^{(n)} + \rho K_i^{(n)} + \frac{d}{dx_j}\left(\sum_{m=1}^{n} \triangle_m e_{ij}\right) = 0. \qquad (2.3)
$$

với điều kiện biên

$$
\left[\lambda\theta^{(n)}\delta_{ij} + G\left(\frac{du_i^{(n)}}{dx_j} + \frac{du_j^{(n)}}{dx_i}\right)\right] n_j = F_i^{(n)} - \left(\sum_{m=1}^{n} \triangle_m e_{ij}\right) n_j. \qquad (2.4)
$$

Hệ (2.3) với điều kiện biên (2.4) là hệ phi tuyến do tồn tại số hạng cuối cùng. Ở cùng một giai đoạn ta giải gần đúng liên tiếp hệ này. Xác định giá trị $\sum_m \triangle_m e_{ij}$ từ kết quả ở gần đúng trước, nó trở thành hàm đã biết, khi đó hệ (2.3), (2.4) trở thành các hệ thức cơ bản của bài toán đàn hồi, thuần nhất, tuyến tính đẳng hướng với lực khối $\rho K_i^{(n)} + \frac{d}{dx_j}\sum_{m=1}^{n} \triangle_m e_{ij}$ và lực mặt $F_i^{(n)} - \left(\sum_{m=1}^{n} \triangle_m e_{ij}\right) n_j$, giải ra ta được nghiệm ở gần đúng đang xét.

Ký hiệu (n) chỉ giai đoạn, (k) thứ tự gần đúng, ta viết tường minh thuật toán giải hệ (2.3), (2.4):

$$
(\lambda + G)\frac{d\theta^{(n,k)}}{dx_i} + G\nabla^2 u_i^{(n,k)} + \rho K_i^{(n)} + \frac{d}{dx_j}\left(\sum_{m=1}^{n-1} \triangle_m e_{ij}\right) + \frac{d}{dx_j}\left(\triangle_n^{(k-1)} e_{ij}\right) = 0.
$$

với điều kiện biên (2.5)

$$
\left[\lambda\theta^{(n,k)}\delta_{ij} + G\left(\frac{du_i^{(n,k)}}{dx_j} + \frac{du_j^{(n,k)}}{dx_i}\right)\right] n_j = F_i^{(n)} - \left(\sum_{m=1}^{n-1} \triangle_m e_{ij}\right) n_j -
$$

$$
- \triangle_n^{(k-1)} e_{ij} n_j. \qquad (2.6)
$$

$$u_i^{(n,k)} = u_{i_0}^{(n)} .$$

Số hạng $\sum_{m-1}^{n-1} \Delta_m e_{ij}$ đã biết từ kết quả của tất cả n − 1 giai đoạn trước, còn đại lượng

$$\Delta_n^{(k-1)} e_{ij} = \langle R_{ijkl} \rangle^{(n,k-1)} \Delta e_{kl}^{(n,k-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(R_{ijkl}^{(n-1)} + R_{ijkl}^{(n,k-1)} \right)\left(e_{kl}^{(n,k-1)} - e_{kl}^{(n-1)} \right)$$

đã biết do tính toán từ kết quả ở gần đúng (k—1).

Bài toán đưa về ở mỗi giai đoạn phải giải liên tiếp các bài toán đàn hồi tuyến tính thuần nhất đẳng hướng; ở các gần đúng toán tử cơ bản của bài toán đàn hồi không thay đổi, chỉ thay đổi lực khối và lực mặt. Điều quan trọng là tìm nghiệm riêng của hệ phương trình (2,5) thỏa mãn điều kiện (2.6) với lực khối phụ và lực mặt phụ. Trong mỗi bước giải cần kiểm tra đại lượng.

$$S_{ij}^{(n)} \dot{e}_{ij}^{(n)} > 0 \text{ đặt tải}, \quad S_{ij}^{(n)} \dot{e}_{ij}^{(n)} < 0 \text{ cất tải}.$$

Phương pháp này có thể dùng để giải phương trình biến phân của lý thuyết quá trình biến dạng dẻo. Ở giai đoạn n đang xét phương trình này nhận được bằng cách thay (1.12) vào phương trình biến phân Lagrange, hoặc có thể nhận được trực tiếp từ hệ (2.2) bằng cách nhân phương trình thứ nhất với du rồi tích phân trên toàn bộ vật thể, sử dụng các hệ thức của (2.2) sau khi biến đổi tích phân ta dẫn đến cùng kết quả

$$\int_\Omega (\lambda\theta^{(n)} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^{(n)} + \sum_{m-1}^{n} \Delta_m e_{ij})\, d\varepsilon_{ij}\, d\Omega - \int_\Omega \rho K_i^{(n)} du_i\, d\Omega -$$

$$- \int_{S_6} F_i^{(n)} du_i\, dS = 0, \qquad (2.7)$$

chú ý rằng $du_i |_{S_u} = 0$,

Ở mỗi gần đúng (k) đại lượng $\sum_{m-1}^{n} \Delta_m e_{ij}$ đã biết, nó được xác định từ gần đúng (k − 1). Do vậy phương trình (2.7) dẫn đến

$$dI^{(n,k)} = 0 , \qquad (2.8)$$

trong đó

$$I^{(n,k)} = \int_\Omega \Big[\frac{\lambda\theta^{(n,k)^2}}{2} + G\varepsilon_{ij}^{(n,k)} \varepsilon_{ij}^{(n,k)} + \Big(\sum_{m-1}^{n-1} \Delta_m e_{ij}\Big) \varepsilon_{ij}^{(n,k)} +$$

$$+ \Delta_n^{(n-k)} e_{ij}\, \varepsilon_{ij}^{(n,k)} \Big] d\Omega - \int_\Omega \rho K_i^{(n)} u_i^{(n,k)} d\Omega - \int_{S_6} F_i^{(n)} u_i^{(n,k)} dS . \qquad (2.9)$$

Bài toán biên có thể thiết lập đối với gia số, sử dụng hệ thức (1.13). Các gia số thỏa mãn hệ các phương trình cơ bản tựa như (2.2).

Đưa hệ phương trình này về các phương trình xác định chuyển dịch và sử dụng phương pháp tựa như phương pháp nghiệm đàn hồi ta đi đến

$$(\lambda + G)\frac{d\Delta\theta^{(n,k)}}{dx_i} + G\nabla^2\Delta u_i^{(n,k)} + \rho\Delta K_i^{(n)} + \frac{d}{dx_j}\left(\Delta_n^{(k-1)} e_{ij}\right) = 0 \,. \quad (2.10)$$

với điều kiện biên

$$\left[\lambda\Delta\theta^{(n,k)}\delta_{ij} + G\left(\frac{d\Delta u_i^{(n,k)}}{dx_j} + \frac{d\Delta u_j^{(n,k)}}{dx_i}\right)\right] n_j = \Delta F_i^{(n)} - \Delta_n^{k-1} e_{ij} n_j \quad (2.11)$$

$$\Delta u_i^{(n,k)} = \hat{\Delta} u_{io}^{(n)}$$

trong đó

$$\Delta_n^{(k-1)} e_{ij} = \frac{1}{2}\left(R_{ijkl}^{(n-1)} + R_{ijkl}^{(n,k-1)}\right)\Delta e_{kl}^{(n,k-1)} \quad (2.12)$$

Kết luận : Phương pháp gần đúng liên tiếp, biến thể phương pháp nghiệm đàn hồi của lý thuyết quá trình biến dạng đàn dẻo cho phép giải các bài toán của lý thuyết dẻo khi quá trình đặt tải lên vật thể là phức tạp, nếu như bài toán đàn hồi tuyến tính, thuần nhất, đẳng hướng tương ứng có nghiệm. Lớp các bài toán đàn hồi như vậy có khá nhiều bao gồm các bài toán phẳng cũng như bài toán không gian.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. А. А. Ильюшин. Пластичность Гостехиздат. 1948.

2. И. И. Ворович. Ю. П. Красовский. О Методе упругих решений. ДАН СССР. 126, №4 1959.

3. Дао Зуй Бик. О Теореме единственности решения краевой задачи теории пластичности с использованием гипотезы локальной определенности. Изв. АНСССР, МТТ, № 1, 1982.

4. Дао Зуй Бик. Модификация соотношений теории упруго-пластических процессов деформирования средней кривизны. Вестник МГУ, №5, 1981.

5. Дао Зуй Бик. Некоторые свойства функций материалов, входящих в соотношения теории пластичности, сборник. Прикладные проблемы прочности и пластичности, 37—45 Горький 1981.

ДАО ЗУИ БИК — МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В статье был предположен метод, аналогичный методу упругих решений для решения краевой задачи теории пластичности при сложном нагружении. Формулировка этого метода для теории упруго—пластичетких процессов деформирования средней кривизны и соответствующий алгоритм строго обоснованы.

ĐAO HUY BICH. A MODIFICATION OF METHOD OF ELASTIC SOLUTIONS IN THE THEORY OF ELASTO – PLASTIC DEFORMATION PROCESSES.

In article was proposed method, similar to method of elastic solutions, for solving boundary problem of theory plasticity with complex loading. Application of this method in theory of elastoplastic deformation processes and formulation of respective algorithm were considered.

Nhận ngày 20-6-1985