VỀ BÀI TOÁN BIÊN TUẦN HOÀN CHỨA THAM SỐ BÉ

PTS PHẠM KỲ ANH

Trong bài này, chúng tôi tìm điều kiện đủ để bài toán biên tuần hoàn phi tuyến chứa tham số bé:

$$\left| \begin{array}{l} x^{(n)} + f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}, \varepsilon) = 0 \\ x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \end{array} \right. \tag{1}$$

có các tính chất sau:

1. Tồn tại nghiệm $x_\varepsilon(t)$ khi $\varepsilon > 0$ đủ bé
2. Nghiệm $x_\varepsilon(t)$ có thể tìm bằng phương pháp Seidel—Newton [1–2]
3. $\dfrac{d^i x_\varepsilon}{dt^i} \rightrightarrows \dfrac{d^i x^*}{dt^i}$ $(\varepsilon \to 0)$; $(i = 0, 1, \dots, n;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$

trong đó $x^*(t)$ là nghiệm của (1) ứng với trường hợp suy biến $\varepsilon = 0$

Ta bắt đầu từ sơ đồ tổng quát sau:

§ 1. Kích động phi tuyến chứa tham số bé của toán tử Fredholm tuyến tính

Xét phương trình

$$Ax + F(x, \varepsilon) = 0 \tag{2}$$

trong đó $A: X \to Y$ là toán tử Fredholm tuyến tính liên tục với chỉ số ind $A = 0$, $F: X \times R \to Y$ là toán tử phi tuyến, $\varepsilon > 0$ là tham số bé, còn X, Y là các không gian Banach.

Sau đây ta luôn hiểu $X \times R$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|(x, \lambda)\| = \max(\|x\|, |\lambda|)$$

Vì A là toán tử Fredholm nên $X_2 = \operatorname{Ker} A$ hữu hạn chiều $Y_1 = \operatorname{I_m} A$ đóng và khả bù.

$$X = X_1 \oplus X_2; \qquad Y = Y_1 \oplus Y_2$$

$\dim X_2 = \dim Y_2 < +\infty$, hơn nữa thu hẹp $\hat{A}$ của A lên X_1 có nghịch đảo liên tục.

Gọi $P: Y \to Y$ là toán tử chiếu xuống Y_1 tuyến tính giới nội: $P^2 = P$

$$\operatorname{Ker} P = Y_2 \text{ và } \operatorname{I_m} P = Y_1$$

Đặt $Q = I - P$, I — là toán tử đơn vị trong Y.

Dựa vào các định lí 2.1, 2.2 [1] ta có kết quả sau:

Định lí 1. Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn :

1. x^* là nghiệm của phương trình (2) ứng với trường hợp $\varepsilon = 0$ tức là

$$Ax^* + F(x^*, 0) = 0 \tag{3}$$

2. $F(x, \varepsilon)$ và đạo hàm Fréchet $F'_x(x, \varepsilon)$ liên tục trong lân cận mở Ω của $(x^*, 0) \in X \times \mathbb{R}$, hơn nữa

$$\forall (x, \varepsilon), (y, \varepsilon) \in \Omega \quad \| QF'_x(x, \varepsilon) - QF_x(y, \varepsilon) \| \leqslant \rho(\| x - y \|)$$

trong đó ρ là hàm liên tục không âm, không giảm và $\rho(0) = 0$.

3. Thu hẹp của $QF'_x(x^*, 0)$ lên X_2 khả nghịch, và

$$2 \| \hat{A}^{-1} \| \, \| PF_x(x^*, 0) \| \, \| QF'_x(x^*, 0) \| \, \| [QF'_x(x^*, 0)]^{-1} \| < 1 \tag{4}$$

Khi đó, tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, sao cho

i. Phương trình (2) có nghiệm x_ε với mọi $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$

ii. Nghiệm x_ε tìm được nhờ phép lặp Seidel — Newton :

$$u_{n+1} = - \hat{A}^{-1} PF(x_n, \varepsilon), \quad \bar{x}_n = u_{n+1} + v_n \tag{5}$$

$$v_{n+1} = v_n - [QF'_x(\bar{x}_n, \varepsilon)]^{-1}_{X_2} QF(\bar{x}_n, \varepsilon), \quad x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}.$$

$$x_0 = x^* ; \quad u_n \in X_1 ; \quad v_n \in X_2 \ (n > 0)$$

và có ước lượng :

$$\| x_n - x_\varepsilon \| \leqslant cq^n \tag{6}$$

trong đó hằng số $q \in [0, 1)$, còn $c > 0$ và không phụ thuộc vào ε và n.

iii. $$\| x_\varepsilon - x^* \| \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

iv. Khi $\varepsilon = 0$ quá trình (5) cũng hội tụ, nếu x_0 chọn đủ gần x^*

Kết luận của định lý 1 không còn đúng, nếu $[QF'_x(x^*, 0)]_{X_2}$ suy biến.

Thật vậy, bài toán :

$$\ddot{x} + \varepsilon x = 0, \quad x(0) - x(1) = \dot{x}(0) - \dot{x}(1) = 0 \tag{7}$$

chỉ có một nghiệm duy nhất $x_\varepsilon \equiv 0$ khi $\varepsilon > 0$ đủ bé. Mặt khác, khi $\varepsilon = 0$, mọi hàm $x^* = \text{const}$ là nghiệm (70).

Do đó nếu xuất phát từ $x^* \neq 0$, phép lặp (5) hội tụ (sau một bước) tới nghiệm $x_\varepsilon \equiv 0$, nhưng $x_\varepsilon \not\to x^*$.

Tổng quát hơn, định lý 1 không áp dụng được cho trường hợp :

$$F(x, \varepsilon) = \varepsilon G(x, \varepsilon), \text{ bởi lẽ } \quad QF'_x(x, \varepsilon) = 0$$

Thay đổi chứng minh định lí 1 và định lí 2.1 [1] một cách thích hợp, ta có định lí sau đây :

Định lý 2. Giả sử $x^* \in \ker A$ thỏa mãn điều kiện $QG(x^*, 0) = 0$. Ngoài ra, trong lân cận mở của $(x^*, 0) \in X \times R$, ánh xạ G và $G'_x(x, \varepsilon)$ liên tục, hơn nữa :

$$\forall (x, \varepsilon), (y, \varepsilon) \in \Omega \quad \| QG'_x(x, \varepsilon) - QG'_x(y, \varepsilon) \| \leqslant \rho(\| x - y \|)$$

trong đó ρ — là hàm liên tục, không âm, không giảm và $\rho(0) = 0$.

Nếu thu hẹp $[QG'_x(x^*, 0)]_{X_2}$ khả nghịch thì khi $\varepsilon > 0$ đủ bé, phương trình

$$Ax + \varepsilon G(x, \varepsilon) = 0$$

có nghiệm x_ε và nghiệm đó tìm được nhờ phép lặp:

$$u_{n+1} = -\varepsilon \widehat{A}^{-1} PG(x_n, \varepsilon), \quad \widetilde{x}_n = u_{n+1} + v_n.$$

$$v_{n+1} = v_n - [QG'_x(\widetilde{x}_n, \varepsilon)]^{-1}_{X_2} QG(\widetilde{x}_n, \varepsilon).$$

$$x_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}, \quad x_0 = x^*$$

với ước lượng sai số $\| x_n - x_\varepsilon \| \leqslant cq^n$ $(q \in [0, 1])$, hơn nữa khi ε dần tới không, x_ε tiến tới x^*.

§ 2. Bài toán biên tuần hoàn chứa tham số bé.

Theo [1 – 2], bài toán (1) qui về dạng (2) nhờ xét các không gian và các toán tử sau:

$$X = \{x \in C^n[0,1] : x^{(i)}(0) = x^{(i)}(1) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)\}$$

$$Y = C[0,1]; \ \| y \| = \max | y(t) |; \ \| x \| = \sum_{i=0}^{n} \| x^{(i)} \|$$

$$Ax = x^{(n)}; \quad F(x, \varepsilon) = f(t, x, x', \ldots, x^{(n)}, \varepsilon)$$

A là toán tử Fredholm tuyến tính liên tục với ind $A = 0$.

$$\operatorname{Ker} A = X_2 \equiv \{x = \text{const}\}$$

$$\operatorname{Im} A = Y_1 \equiv \{y \in Y : \int_0^1 y(s)\, ds = 0\}$$, ngoài ra:

$$X = X_1 \oplus X_2; \quad Y = Y_1 \oplus Y_2$$

$$Y_2 = \{\text{const}\}; \quad X_1 = \{x \in X : \int_0^1 x(s)\, ds = 0\}$$

Thu hẹp $\widehat{A}$ của A lên X_1 có nghịch đảo liên tục:

$$\widehat{A}^{-1} y = \int_0^1 \frac{dG}{dt}(t, s)\, y(s)\, ds \qquad (y \in Y_1) \tag{8}$$

và có ước lượng:

$$\| \widehat{A}^{-1} \| \leqslant \omega \equiv 1 + \sum_{i=1}^{n} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 \left| \frac{d^iG}{dt^i}(t, s) \right| ds$$

Hàm Green $G(t, s)$ trong (8) có dạng:

$$G(t, s) \begin{cases} a_0(s) + a_1(s)t + \ldots + a_n(s)t^n & 0 \leqslant t \leqslant s \\ b_0(s) + b_1(s)t + \ldots + b_n(s)t^n & s < t \leqslant 1 \end{cases}$$

Các hệ số $c_i = b_i - a_i$ và b_i $(i = 0,1,\ldots, n)$ dễ dàng tìm được. Chúng là nghiệm của các hệ đại số tuyến tính dạng tam giác.

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} C_j s^{j-k} = 0, \quad n!\, C_n = 1, \quad (k = 0,1,\ldots, n-1)$$

$$\text{và } b_0 = c_0, \quad \sum_{j=k+1}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} b_j = -k!\, c_k, \quad (k = 0,1,\ldots, n-1).$$

Sau khi tìm được c_j, b_j, ta có $a_j = b_j - c_j$ và như vậy hàm Green $G(t, s)$ được xây dựng.

$$\text{Đặt} \quad Qy = \int_0^1 y(s)\,ds \quad ; p = I - Q. \text{ Rõ ràng } P : Y \to Y$$

là toán tử chiếu tuyến tính liên tục, với $\operatorname{Ker} P = Y_2, I_m P = Y_1$, ngoài ra $\| P \| \leqslant 2$; $\| Q \| \leqslant 1$

Từ bổ đề 2, định lý 2 [2] và định lý 1, ta có :

Định lý 3 : Giả sử các điều kiện dưới đây được thỏa mãn :

1. Hàm $\overline{x} \in X$ là nghiệm của phương trình (1), ứng với trường hợp $\varepsilon = 0$, tức là :

$$\begin{cases} \overline{x}^{(n)} = f(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}, \ldots, \overline{x}^{(n)}, 0) \\ \overline{x}^{(i)}(0) = \overline{x}^{(i)}(1) \quad (i = 0,1,\ldots, n-1) \end{cases}$$

2. Hàm $f(t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon)$ và $\dfrac{\partial f}{\partial \xi_i}(t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon)$

$(i = 0,1 \ldots, n)$ liên tục theo hợp các biến trong tập :

$$\Delta = \{(t, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \varepsilon) : 0 \leqslant t \leqslant 1 ; \ |\xi_i| \leqslant R (i = 0,1,\ldots, n) ; 0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0\}.$$

v $R > \|| \overline{x} \||$, hơn nữa :

$$\forall (t, \xi, \varepsilon), (t, \tilde{\xi}, \varepsilon) \in \Delta, \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(t, \xi, \varepsilon) - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(t, \tilde{\xi}, \varepsilon) \right| \leqslant L \sum_{j=0}^{n} |\xi_j - \tilde{\xi}_j|^{v}$$

$(i = 0, 1, \ldots, n)$, trong đó $L > 0$ và $v \in [0,1]$ là các hằng số.

3. $$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi_0}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}, \ldots, \overline{x}^{(n)}, 0)\, dt \neq 0 \text{ và } 4\alpha_0^2 \gamma_0 \omega < 1$$

trong đó

$$\alpha_0 = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}, \ldots, \overline{x}^{(n)}, 0) \right|$$

$$\gamma_0^{-n} = \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi_0}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}, \ldots, \overline{x}^{(n)}, 0)\, dt \right|$$

Khi đó tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, sao cho :

i/ Phương trình (1) có nghiệm x_ε với mọi $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$

ii/ x_ε tìm được nhờ phép lặp:

$$y_k = \int_0^1 f(s, x_k, \dot{x}_k, \ldots, x_k^{(n)}, \varepsilon)\, ds - f(t, x_k, \dot{x}_k, \ldots, x_k^{(n)}, \varepsilon)$$

$$u_{k+1} = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\, y_k(s)\, ds$$

$$v_{k+1} = v_k - \frac{\int_0^1 f(s, u_{k+1} + v_k, \dot{u}_{k+1}, \ldots, u_{k+1}^{(n)}, \varepsilon)\, ds}{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi_0}(s, u_{k+1} + v_k, \dot{u}_{k+1}, \ldots, u_{k+1}^{(n)}, \varepsilon)\, ds}$$

$$x_{k+1} = u_{k+1} + x_{k+1} \qquad (x_0 = \bar{x})$$

và có ước lượng $|||x_n - x_\varepsilon||| \leqslant cq^n$

với $q \in [0,1]$ và $c > 0$ là hằng số không phụ thuộc vào ε và n

iii/ $|||x_\varepsilon - \bar{x}||| \to 0 \ (\varepsilon \to 0)$

Chú thích: Trong điều kiện định lí 3, khi $\varepsilon > 0$ và $r > 0$ đủ nhỏ, phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong tập.

$$S_1 = \{x \in X : |||x - \bar{x}||| \leqslant r/3\}$$

Dùng định lí 2 ta có thể xét bài toán

$$\begin{cases} x^{(n)} + \varepsilon g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}, \varepsilon) = 0 \\ x^{(i)}_{(0)} = x^{(i)}_{(1)}, \quad i = (0, 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

và chứng minh một định lí tương tự định lí 3 cho bài toán này.

Trở lại ví dụ (7), từ định lí 1 (?) suy ra khi $\varepsilon > 0$ đủ bé, bài toán (7) có x_ε và nghiệm đó tìm được nhờ phép lặp Séid-el–Neuton.

Vì $x_0 = \bar{x} \equiv 0$, nên $y_0 = \int_0^1 x_0\, ds - x_0 = 0$ do đó

$$u_1 = \varepsilon \int_0^1 \frac{dG}{dt} y_0\, d_s = 0, \qquad v_1 = v_0 - \int_0^1 (u_1 + v_0)\, ds = 0$$

Như vậy $x_1 = u_1 + v_1 = 0$. Tương tự $x_n \equiv 0 \ (n > 0)$

Vì $x_n \to x_\varepsilon \ (n \to \infty)$ nên $x_\varepsilon \equiv 0 \ (\equiv x)$.

Xét bài toán $\dot{x} + \varepsilon(x^2 + 4x - 0{,}01) + 2t - 1 = 0$; $x(0) = x(1)$: Xuất phát từ $x_0 = t(1-t)$, ta có $x_1 = x^* = t(1-t) - 0{,}01$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Pham Ki Anh. Acta. Mat. Vietnamica, V 7, N 2, 111–126, 1892.

2. Фам Ки Анъ, Ву Зуй Тик. Украин. МАТ Жур., Т 35, N 3, 348-352, 1983.

ФАМ КИ АНЬ — О НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В данной заметке рассматривается общая нелинейная периодическая граничная задача с малым параметром (ПГЗ — ε). Найдено достаточное условие для выполнения следующих утверждений: 1) для достаточно малого $\varepsilon > 0$, задача (ПГЗ — ε имеет локально-единственное решение, которое может быть найдено методом Зейделя-Ньютона. 2) Решение (ПГЗ — ε) и его производные, при ε стремящемся к нулю, сходятся равномерно к решению вырожденной задачи (ПГЗ—0) и его производным соответственно.

PHAM KI ANH. ON NONLINEAR PERIODIC BOUNDARY—VALUE PROBLEMS WITH A SMALB PARAMETER. In this note. general problem of nonlinear periodic boundary—with a small parameter (PBVP—ε) is considered A sufficient condition for the following statements is established:

1/ For a sufficiently small $\varepsilon > 0$, the (PBVP — ε) has a local unique solution, which can be found by the Seidel—Newton method.

2/ The solution of (PBVP —ε) and its derivatives, as ε turns to zero, converges uniformly to the solution of the degenereted problem (PBVP—o) and to its derivatives respectively.

Nhận ngày 20 - 6 - 1985

(Tiếp theo trang 11)

6. Nguyễn Văn Mậu. О нетеровости одного класса линейных операторов в Банаховом пространстве. Диф. урав. XIX, N° 11, 1972—1977, 1982.

7. Nguyễn Văn Mậu. Диф. урав. XX. N° 5, 885—886, 1981

НГУЕН ВАН МАУ — АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрен сингулярный интегральный оператор Коши (I). Доказано, что это оператор является алгебраическим. Изучены регуляуная задача и Нетерово условие многочлена (9). Получено решение характеристического уравнения (16). В явном виде.

NGUYEN VAN MAU. CHARACTERIZATION OF SINGULAR INTEGRAL OF CAUCHY TYPE AND ITS APPLICATIONS IN SOLVING INTEGRAL EQUATIONS. Consider singular integratol operator of the form (1). This operator is showed to be an algebraic operator. A formula of regularizer of the polynomial(9) and Noetherian conditions are given. A complete solution of the characteristic equation (6) is obtained in evident form.

Nhận ngày 20-6-1985