MẦM CỦA ĐA HỆ ĐỊA PHƯƠNG

PTS. LÊ VĂN TRỰC

Những năm gần đây, nhiều nhà toán học trên thế giới đã tập trung nghiên cứu những vấn đề thuộc hệ động lực đa trị. Trong bài báo này, dựa vào định nghĩa đa hệ địa phương của Nagy [2], ta hãy đưa ra khái niệm mầm của đa hệ địa phương sao cho một số tiên đề đối với đa hệ địa phương, chủ yếu là tiên đề về sự tồn tại được làm yếu đi. Khái niệm tương đương địa phương của hai mầm địa phương được phát biểu, đồng thời ta sẽ mô tả cấu trúc của đa hệ địa phương.

I — CÁC ĐỊNH NGHĨA

1.1. Định nghĩa : (Hệ Nagy) Kí hiệu X — không gian Hausdorff compắc địa phương. R — tập hợp các số thực với tôpô và mêtric Oclit, R^+ — tập hợp các số thực không âm và giả sử p là hàm (hàm đa trị) được xác định trong tập con $D_p \subset R^+ \times X$ mà giá trị của chúng là đa hệ địa phương trong không gian X nếu thỏa mãn những tiên đề sau.

I. Tiên đề về sự tồn tại địa phương : mỗi điểm $x \in X$ được tương ứng với số $e(x) \in (o, +\infty]$ sao cho $(v, x) \in D_p$ nếu $o \leqslant v < e(x)$.

II. Tiên đề về những giá trị ban đầu : đối với mỗi $x \in X$ ta có $p(o, x) = [x]$.

III. Tiên đề nửa nhóm : nếu như $(v + u, x) \in D_p$ hoặc $(u, x) \in D_p$ và $(v, y) \in D_p$ đối với $y \in p(u, x)$, thì $(v, z) \in D_p$ đối với mọi $z \in p(u, x)$, $(v + u, x) \in D_p$ và nghiệm đúng đẳng thức

$$p(v, p(u, x)) = p(v + u, x) \tag{1.1}$$

IV. Tiên đề compắc điểm : đa hàm p compắc điểm,

V. Tiên đề liên tục : đa hàm p là nửa liên tục trên,

VI. Tiên đề về tính mở : miền xác định D_p của đa hàm p là tập mở trong $R^+ \times X$,

Chú ý rằng nếu $D_p = R^+ \times X$ thì tiên đề (I) và (VI) tự nhiên được thỏa mãn và tiên đề (III) đòi hỏi đẳng thức (1.1) được thỏa mãn đối với mọi $x \in X$, $u, v \in R^+$. Khi đó đa hệ địa phương được gọi là toàn cục.

1.2. Định nghĩa : Giả sử cho không gian Hausdorff compắc địa phương X và đa hàm

$$q : R^+ \times X \to X \tag{1.2}$$

Ta nói rằng đa hàm q là mầm của đa hệ địa phương trong X nếu đối với mỗi điểm $x_0 \in X$ tồn tại lân cận U của điểm x_0 và số $h(x_0) > 0$ sao cho thỏa mãn những điều kiện sau:

I. $[0, h(x_0)] \times U \subset D_q$.

II. Đối với mỗi điểm $x \in U$ thì $q(0, x) = [x]$.

III. Đối với mỗi điểm $x \in U$ và mọi $u, v \in R^+$ sao cho $v + u < h(x_0)$, thì đẳng thức sau được thỏa mãn:

$$q(v, q(u, x)) = q(u + v, x) \qquad (1.3)$$

IV. Đối với mỗi điểm $(u, x) \in [0, h(x_0)] \times U$ tập $q(u, x)$ là compắc

V. Đa hàm (1.2) nửa liên tục trên trọng tập $[0, h(x_0)] \times U$

Chú ý rằng mỗi đa hệ địa phương đồng thời là mầm của đa hệ địa phương. Do đó tất cả các khái niệm đưa ra đối với mầm của đa hệ địa phương, có thể áp dụng cả với đa hệ địa phương.

1.3. Định nghĩa. Giả sử q_1, q_2 là những mầm của đa hệ địa phương trong X. Ta nói rằng những mầm q_1, q_2 là tương đương địa phương nếu đối với mỗi $x_0 \in X$ tồn tại lân cận V của điểm x_0 và số $\delta > 0$ sao cho thỏa mãn

$$q_1(u, x) = q_2(u, x) \text{ đối với mọi } (u, x) \in [0, \delta) \times V \qquad (1.4)$$

Mục đích nghiên cứu của chúng ta là hãy chỉ ra rằng đối với mầm q của đa hệ địa phương tồn tại đa hệ địa phương p, tương đương địa phương với q.

1.4. Mệnh đề: Giả sử q là mầm của đa hệ địa phương trong không gian X và giả sử K là tập compắc của không gian X. Khi đó đối với mỗi điểm $x \in K$ tồn tại lân cận mở U(x) của điểm x và số h(x) thỏa mãn những điều kiện của định nghĩa 1.2

Đương nhiên hệ

$$\{U(x) \subset X,\ x \in K\} \qquad (1.5)$$

tạo thành phủ mở của tập compắc K, do đó từ phủ này có thể chọn phủ hữu hạn. Giả sử N(K) kí hiệu hệ các tập con hữu hạn của tập K sao cho đối với mỗi tập $I \in N(K)$ thì

$$[U(x) \subset X;\ x \in I] \qquad (1.6)$$

là phủ hữu hạn của tập K được chọn từ phủ (1.5). Kí hiệu

$$h(I) = \min[h(x);\ x \in I] \quad \text{và} \quad H(K) = \sup[h(I);\ I \in N(K)] \qquad (1.7)$$

Trực tiếp từ sự xây dựng H(K) và định nghĩa 1.2 suy ra khẳng định sau:

i. $[0, H(K)] \times K \subset D_q$ (1.8)

ii. $q(v, q(u, x)) = q(v + u, x)$ đối với mọi $x \in K$, $u, v \in R^+$,

$$u + v < H(K),$$

iii. Đa hàm q là nửa liên tục trên trong tập $[0, H(K)] \times K$.

iV. Đối với mỗi $v \in [0, H(K)]$ tập $q([0, v] \times K)$ compắc

II – CÁC TÍNH CHẤT CỦA MẦM ĐỊA PHƯƠNG

2.1. Định nghĩa: Giả sử q là mầm của đa hệ địa phương. Giả sử cho điểm $(t, x_0) \in R^+ \times X$ và tập

$$D = [r_0, r_1, \dots, r_n] \qquad (2.1)$$

những điểm thuộc R^+ sao cho

$$0 = r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n = t \qquad (2.2)$$

Ta nói rằng (2.1) là cách chia khoảng $[o, t]$ thừa nhận được đối với (t, x_0) nếu có những tính chất sau :

i. $A_0 = x_0$, $A_1 = q(r_1, A_0)$,

$$A_{k+1} = q(r_{k+1} - r_k, A_k), \quad k = 1,2,\ldots, n-1 \qquad (2.3)$$

ii. Đối với mỗi tập $q([o, r_{k+1} - r_k], A_k)$, $k = o, 1, \ldots, n-1$ tồn tại lân cận compắc W_{k+1} sao cho

$$o \leqslant r_{k+1} - r_k < H(W_{k+1}) \qquad (2.4)$$

Tập hợp các cách chia khoảng $[o, t]$ thừa nhận được đối với điểm (t, x_0) kí hiệu bởi $R(t, x_0)$. Hiển nhiên những khẳng định sau được nghiệm đúng:

2.2. Bổ đề

i. Những tập A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ thuộc (2.3) là compắc,

ii. $[o, r_{k+1} - r_k] \times W_k \subset D_q$ đối với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

iii. $q(v, q(u, x)) = q(v + u, x)$ đối với mọi $x \in W_k$,

$u, v \in R^+$, $u + v < r_{k+1} - r_k$.

2.3 Bổ đề: Giả sử $D \in R(t, x^0)$, $D : 0 = r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_n = t$, và giả sử cách chia D' xuất hiện từ cách chia D bằng cách thêm một điểm :

$D' : 0 = r_0 \leqslant r_1 \ldots \leqslant r_k \leqslant r' \leqslant r_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant r_n = t$

Khi đó $D' \in R(t, x_0)$

2.4 Định nghĩa: Giả sử D, D' là hai cách chia khoảng $[0, t]$ tức là

$D = \{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$, $= 0\ r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n = t$

$D' = \{r'_0, r'_1, \ldots, r'_m\}$, $0 = r'_0 \leqslant r'_1 \leqslant \ldots \leqslant r'_m = t$

Ta nói uằng cách chia D' mịn hơn các chia D nếu $D \subset D'$.

2.5 Bổ đề: Các khẳng định sau được nghiệm đúng:

(i) nếu $D \in R(t, x_0)$, D' mịn hơn cách chia D, khi đó $D' \in R(t, x_0)$,

ii) Nếu $D_1, D_2 \in R(t, x_0)$, khi đó $D_1 U D_2 \in R(t, x_0)$.

2.6 Bổ đề: Giả sử $D_1, D' \in R(t, x_0$, $D = [r_0, r_1, \ldots, r_n]$.

$D' = [r'_0, r'_1, \ldots, r'_m]$. Khi đó đẳng thức sau được nghiệm đúng

$$A_n = q(t - r_{n-1}, A_{n-1}) = A'_m = q(t - r'_{m-1}, A'_{m-1}).$$

tức là tập cuối cùng trong dãy những tập hợp A_i trong (2.3) không phụ thuộc vào việc chọn cách chia thuộc $R(t, x_0)$.

2.7 Cấu trúc đa hệ địa phương Giả sử cho điểm $(t, x_0) \in R^+ \times X$ sao cho $R(t, x_0) \neq \phi$: Ta hãy chọn bất kỳ cách chia $D \in R(t, x_0)$, $D = [r_0, r_1, \ldots, r_n]$. Giả sử $A_n = q(r_n - r_{n-1}, A_{n-1})$

Định nghĩa: $P(t, x_0) = A_n \qquad (2.6)$

Hệ thức (2.6) xác định đa hàm $P : R^+ \times X \to X$ đối với mọi điểm $(t, x) \in R^+ \times X$ sao cho $R(t, x) \neq \phi$

Bây giờ ta sẽ chứng minh đa hàm p được định nghĩa như vậy là đa hệ địa phương trong X, tức là có những tính chất nêu trong định nghĩa (1.1).

Tiên đề I: Ta hãy xác định

$$e(x) = \sup [t \in R^+, R(t, x) \neq \phi] \text{ đối với mọi } x \in X \qquad (2.7)$$

Nếu như $t \in (0, h(x))$, khi đó đương nhiên $R(t, x) \neq \phi$, và do đó $e(x) \geqslant h(x) > 0$ đối với mọi $x \in X$. Nếu $v \in [0, e(x)]$, khi đó theo (2.7), tồn tại cách chia khoảng $[0, v]$ thừa nhận được đối với điểm (v, v_0) do đó $(v, x) \in D_p$.

Ngược lại, nếu $(v, x) \in D_p$, khi đó phải tồn tại cách chia khoảng $[0, v]$, thừa nhận được đối với điểm (v, x), và do đó $R(v, x) \neq \phi$, do đó $v \in [0, e(x)]$.

Tiên đề II: $p(0, x) = q(0, x) = [x]$ đối với mọi $x \in X$

Tiên đề III: Ta nhận thấy rằng đối với mỗi điểm $x \in X$ và mỗi điểm $u \in [0, h(x)$ thì $p(u, x) = q(u, x)$.

Giả sử những điểm $u, v \in R^+$ sao cho cách chia $r_0 = 0$, $r_1 = u$, $r_2 = u + v$ của khoảng $[0, u + v]$ là thừa nhận được đối với điểm $(u + v, x)$. Khi đó theo định nghĩa của đa hàm p

$$p(v + u, x) = q(v, q(u, x))$$

cho nên $[v] \times q(u, x) \subset D_q$. Như vậy đối với mỗi $y \in q(u, x) = p(u, x)$ thì $p(v, y) = q(v, y)$ do đó

$$p(u + v, x) = q(v, p(u, x)) = q(v p(u, x)) = \bigcup_{y \in p(u,x)} q(v, y) = \bigcup_{y \in p(u,x)} p(v, y) = p(v, p(u, x))$$

Bây giờ giả sử $u, v \in R^+$ là tùy ý sao cho $(u + v, x) \in D_p$.

Khi đó thì tại cách chia $D \in R(u + v, x)$ sao cho

$$D : 0 = r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_k = u \leqslant r_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant r_n = u + v$$

Theo định nghĩa của đa hàm p hệ thức sau được nghiệm đúng

$$p(r_{s+1}, x) = p(r_{s+1} - r_s, p(r_s, x)) = q(r_{s+1} - r_s, p(r_s, x))$$

đối với mọi $s = 0, 1, \ldots, u - 1$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} p(u + v, x) &= p(r_n, x) = p(r_n - r_{n-1}, p(r_{n-1}, x)) = \\ &= p(r_n - r_{n-1}, p(r_{n-1} - r_{n-2}, p(r_{n-2}, x)) = \ldots = \\ &= p(_n - r_{n-1}, p(r_{n-1} - r_{n-2}, \ldots, p(r_{k+1} - r_k, p(r_k, x)), \ldots,)). \end{aligned}$$

Bởi vì $r_k = u$, từ hệ thức trên và từ định nghĩa của đa hàm p ta sẽ nhận được

$$\begin{aligned} p(u + v, x = & \bigcup_{y \in p(u,x)} p(r_n - r_{n-1}, p(r_{n-1} - r_{n-2}, \ldots, p(r_{k+1} - r_k, y)), \ldots,)) = \\ = & \bigcup_{y \in p(u,x)} p(r_n - r_k, y) = p(x, p(u, x)) \end{aligned}$$

Tiên đề IV Suy từ bổ đề 2.2 (1)

Tiên đề V Miền xác định D_p của đa hàm p là tập mở trong $R^+ \times X$ (xem [1]).

Tiên đề VI Đa hàm p là nửa liên tục trên. Xem [1].

(*Xem tiếp trang*) 26