VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN APHIN LIÊN KẾT

GSI NGUYỄN VĂN THỎA

Trong bài này hệ thức giao hoán và nguyên lý biến phân trong cơ học được tổng quát hóa trong không gian aphin liên kết và nói chung trong hệ tọa độ không hôlônôm. Phương trình chuyển động của một hạt tự do là đường trắc đoản trong không gian tương ứng và không phụ thuộc vào trường xoắn. Nghiên cứu trường hợp chuyển động trong trường vật lý được hình học hóa và trong hệ quy chiếu quay.

Giả thiết có không gian hai tham số [1]

$$x^{\mu} = x^{\mu}(u, v) \tag{1}$$

Như vậy đối với các hệ tọa độ hôlônôm chúng ta có hệ thức giao hoán.

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dx^{\mu}}{du}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{dx^{\mu}}{dv}\right) = 0. \tag{2}$$

Tuy nhiên, đối với các hệ tọa độ không hôlônôm, các thành phần của chúng được ký hiệu bằng các chỉ số la tinh, hệ thức giao hoán (2) nói chung không đúng nữa, mà sẽ là

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dx^{k}}{du}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{dx^{k}}{dv}\right) = 2\Omega^{k}_{mn}\frac{dx^{m}}{dv}\frac{dx^{n}}{du}, \tag{3}$$

ở đây

$$\frac{dx^{k}}{du} = h^{k}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{du}, \quad \frac{dx^{k}}{dv} = h^{k}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{dx}, \tag{4}$$

$$\Omega^{k}_{nm} = \partial_{[\mu} h^{k}_{\nu]} h^{\mu}_{m} h^{\nu}_{n} \tag{5}$$

h^{k}_{ν} là hệ số Lamê tổng quát, Ω^{k}_{mn} là đối tượng không hôlônm [2,7]

Từ hệ thức (3) (4) và (5) trực tiếp suy ra

$$\frac{\bar{\delta}}{\delta v}\left(\frac{dx^{k}}{du}\right) - \frac{\bar{\delta}}{\delta u}\left(\frac{dx^{k}}{dv}\right) = 0 \tag{6}$$

các đạo hàm biệp biến $\bar{\delta}$ tính tương ứng theo hệ số quay Ricci

$$\bar{\gamma}_{kmn} = \Omega_{kmn} + \Omega_{mnk} + \Omega_{nmk} \tag{7}$$

Hệ thức giao hoán (3) có thể được tổng quát hóa. Trong không gian aphin liên kết:

$$\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{dx^{k}}{du}\right) - \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{dx^{k}}{dv}\right) = 2S^{k}_{mn}\frac{dx^{m}}{du}\frac{dx^{n}}{dv}, \tag{8}$$

Các đạo hàm hiệp biến tính tương ứng theo hệ số liên kết tổng quát

$$\gamma^k_{mn} = \gamma^k_{mn} + \hat{\gamma}^k_{mn}, \tag{9}$$

$\hat{\gamma}$ là phần tenxơ của hệ số liên kết, S là tenxơ xoắn:

$$S^k_{mn} = \hat{\gamma}^k_{[mn]} \tag{10}$$

Nếu bây giờ chúng ta xem biến phân hiệp biến như một toán tử được xác định bởi hệ thức:

$$\underset{v}{\delta q^N} = \left(\frac{\delta q^N}{\delta v}\right)_{v=0} \delta v. \tag{11}$$

Chúng ta có

$$\underset{v}{\delta}\left(\frac{dx^k}{du}\right) - \frac{\delta}{\delta u}\left(\underset{v}{\delta x^k}\right) = 2S^k_{mn}\frac{dx^m}{du}\underset{v}{\delta x^n}. \tag{12}$$

Để ứng dụng (12) vào trong cơ học các hệ không hôlônôm ta đi từ nguyên lý biến phân có hàm tác dụng

$$S = \int L(x^\lambda, \dot{x}^k)\, du; \quad \dot{x}^k = \frac{dx^k}{du}, \tag{13}$$

Vì rằng S là một đại lượng vô hướng nên biến phân của nó trùng với biến phân hiệp biến

$$\underset{v}{\delta S} = \int \left(\nabla_k L\, \underset{v}{\delta v^k} + \frac{dL}{d\dot{x}^k}\underset{v}{\delta \dot{x}^k}\right) du = \int \left[\nabla_k L - \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\delta L}{d\dot{x}^k}\right) + \right.$$

$$\left. + 2S^n_{mk}\frac{dL}{d\dot{x}^n}\dot{x}^m\right]\underset{v}{\delta x^k}\, du + \int \frac{d}{du}\left(\frac{dL}{d\dot{x}^k}\underset{v}{\delta x^k}\right) du.$$

Điều kiện cực trị của đường cong có hàm tác dụng (13) giữa hai điểm cố định cho ta phương trình:

$$\nabla_k L - \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{dL}{d\dot{x}^k}\right) + 2S^n_{mk}\frac{dL}{d\dot{x}^n}\dot{x}^m = 0. \tag{14}$$

Phương trình biến phân (14) có thể xem như phương trình chuyển động của một hạt nào đó trong hệ quy chiếu phi quán tính.

Đối với một hạt tự do, hàm Lagrange ở hệ tọa độ định xứ có dạng

$$L = -m\sqrt{\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\ ; \ \eta_{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1) \tag{15}$$

Từ (14) và (15) ta suy ra phương trình chuyển động hiệp biến

$$\frac{\delta}{\delta u}(m\dot{x}_k) + 2\, mS^n_{mk}\dot{x}_n\dot{x}^m = 0 \tag{16}$$

Đối với cơ học chất điểm, phương trình chuyển động phản biến và hiệp biến cũng mô tả chuyển động của một hạt, vì vậy chúng phải trùng nhau. Do đó đạo hàm hiệp biến của tenxơ metric phải bằng không

$$\Delta_k \eta_{mn} = 2\hat{\gamma}_{(mn)k} = 0, \tag{17}$$

từ đó suy ra

$$\hat{\gamma}_{mnk} = \hat{\gamma}_{[mn]k} \tag{18}$$

Trên cơ sở đó ta có thể giả thiết tenxơ xoắn phản đối xứng theo cả ba chỉ số

$$S_{mnk} = V_{[mnk]} \tag{19}$$

Trường xoắn khi đó không ảnh hưởng đến chuyển động của một hạt và có thể xem như trường riêng của hạt,

Từ (16) và (19) ta suy ra phương trình chuyển động của một hạt tự do

$$\frac{\delta}{\delta u}(m\dot{x}^k) = 0\,, \tag{20}$$

hay là

$$\frac{\bar{\delta}}{\delta u}(m\dot{x}^k) = -\, m\widehat{\Gamma}^k_{mn}\,\dot{x}^m\dot{x}^n\,. \tag{21}$$

Như vậy chuyển động của một hạt trong trường đã được hình học hóa được biểu diễn bởi đường trắc đoạn của không gian đó.

Vế phải của (21) là lực do trường đã được hình học hóa tác dụng lên hạt Trên cơ sở (18) ta đặt

$$\widehat{\Gamma}_{[km]n} = -\,\eta_n{}_{[m}\Pi_{k]}\,. \tag{22}$$

Thay (22) vào (21) ta được

$$\frac{\bar{\delta}}{\delta u}(m\dot{x}^k) = m\Pi^k - m\,(\Pi_n\dot{x}^n)\,\dot{x}^k\,.$$

ở đây ta chọn tham số u sao cho $\dot{x}^k\dot{x}_k = 1$. Số hạng thứ nhất của vế phải phương trình (22) là lực do trường đã được hình học hóa tác dụng lên hạt, số hạng thứ hai của vế phải là lực có phương song song với tốc độ và hướng ngược chiều chuyển động nên có thể xem như lực cản (do ma sát, bức xạ...). Nếu như Π_n hướng vuông góc với tốc độ (nghĩa là nằm trong không gian riêng của chuyển động) thì lực cản đó biến mất.

Phương trình (20) và do đó phương trình (22) được tiên đề hóa trong [3] để giải thích độ dịch chuyển của quỹ đạo sao Thủy trong hệ mặt trời.

Bây giờ chúng ta xét sang chuyển động tự do của một hạt trong hệ chuyển động có gia tốc. Khi đó $\widehat{\Gamma} = 0$ và phương trình (21) có dạng [4, 5, 6].

$$\frac{d}{du}(m\dot{x}^k) + m\,\bar{\Gamma}^k_{mn}\,\dot{x}^m\dot{x}^n = 0\,. \tag{23}$$

Đối với hệ quay có metric :

$$ds^2 = c^2dt^2 - [dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\varphi - \omega dt)^2]\,,$$

hệ số tétrad tiêu chuẩn có dạng [6]

$$h^k_\mu = \begin{vmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ \frac{\omega a^2}{\xi} & 0 & 0 & \frac{a}{\xi} \end{vmatrix} \;;\; h^k_\mu h^\nu_k = \delta^\nu_\mu\,. \tag{24}$$

Phương trình (23) khi đó có dạng

$$\frac{\delta}{\delta\Gamma}\left(\frac{m\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{m}{\xi^2\sqrt{1-\beta^2}}(\omega^2\vec{u} + 2[\vec{\beta} \times \vec{\omega}) , \tag{25}$$

ở đây

$$\dot{x}^k = \frac{dx^k}{d\Gamma}\ \frac{d\Gamma}{du} ; \quad \frac{dx^k}{d\Gamma} = (1, \frac{\vec{v}}{c}) ; \quad \frac{d\Gamma}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} .$$

đạo hàm hiệp biến $\frac{\delta}{\delta\Gamma}$ tính tương ứng theo hệ số quay Ricci ba chiều. Bỏ số hạng nhỏ bậc cao ta có

$$\frac{d}{d\Gamma}(m\vec{\beta}) = m(\omega^2\vec{a} + 2[\vec{\beta} \times \vec{\omega}]) .$$

Đó là phương trình chuyển động Newton-Coriolis.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Дж. Сунг. Общая теория относителности, М. 1963.
2. Ю Румер, Исследование по 5-оптике, М. 1956.
3. А. Е. Левашев, ДАН СССР, 4, 124, (1931)
4. Дж. Сунг Тензорные методы в динамике, М. 1947
5. S. Fabricius, Z. Phys., 4, *161*, 392, (1961)
6. Nguyễn Văn Thỏa, Вестник БГУ, сер. 1, N 3. 64, (1972)
7. Nguyễn Văn Thỏa. Điện Động lực học II, Hà nội 1982.

НГУЕН ВАН ТХОА — ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Коммутативное соотношение и вариационный принцип в механике обобщены в пространстве аффинной связности и вообще в неголономных координатах. Уравнения движения свободной частицы являются геодезической линией в соответствующем пространстве и независят от поля кручения. Исследуется случай движения в физических геометризованных полях и в вращающейся системе отсчёта.

NGUYEN VAN THOA. ON THE EQUATION OF MOTION IN SPACE OF AFFINE CONNECTION.

Commutative relation and variational principle in mechanics are generalized in space of affine connection and generally for nonholonomic coordinates. Equations of motion for free particles are geodesic line in corresponding space and do not depend on the fied of twist. The case of motion in geometrized physical fields and in revolving systems of reference is considered.

Nhận ngày 20-4-1985