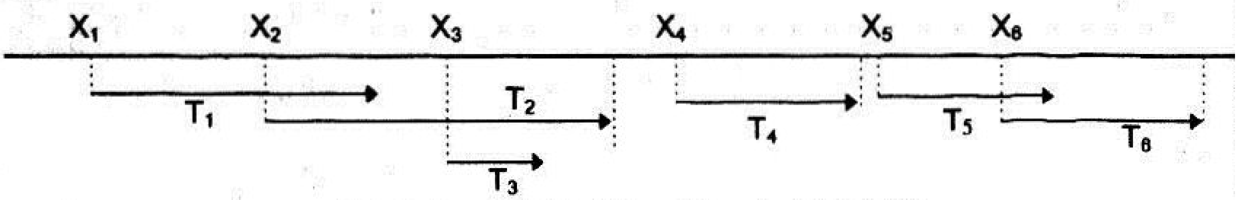
VỀ CƯỜNG ĐỘ VÀ PHÂN PHỐI ĐỘ DÀI PHỦ*

Đào Hữu Hồ
Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội.

1. ĐẶT BÀI TOÁN

Trong các bài toán về hệ phục vụ đám đông, người ta thường quan tâm đến (vào và thời gian phục vụ của hệ. Dòng vào là số người đến trạm (hệ) phục vụ t khoảng thời gian T_o nào đó. Thông thường dòng vào được giả thiết tuân theo Poisson. Thời gian khách hàng yêu cầu phục vụ T_i là các biến ngẫu nhiên độc lập (phân phối, thường được giả thiết là phân phối mũ.

Ký hiệu X_i là thời điểm đến của các khách hàng. Số bàn phục vụ của trạm (h không hạn chế, nghĩa là bất kỳ khách nào đến cũng được phục vụ ngay, không phải T_i là thời gian mà khách hàng đến tại thời điểm X_i yêu cầu phục vụ. Nếu ta lấy các điểm mút bên trái của đoạn biểu diễn thời gian phục vụ T_i, ta có mô hình biểu sau



Hình 1. X_i thời điểm đến của khách hàng
T_i thời gian khách yêu cầu phục vụ.

Các đoạn bị gạch trong hình 1 là các khoảng thời gian hệ bận khách, tức là gian mà hệ đang phục vụ cho ít nhất một khách hàng. Ta gọi độ dài của các đoạn gian bị gạch là đoạn thời gian hệ đang có khách. Ký hiệu các đoạn thời gian đó là

Các đoạn không bị gạch trong hình 1 là các khoảng thời gian hệ rỗi, tức là hệ kl phải phục vụ cho một khách hàng nào. Ta gọi độ dài của các khoảng này là thời hệ nhàn rỗi. Ký hiệu các đoạn thời gian đó là η_i.

Giả sử $\{X_i, i \leq 1\}$ là quá trình Poisson với cường độ λ. Khi đó $\xi_1, \xi_2 \ldots$ là các ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối; $\eta_1, \eta_2 \ldots$ độc lập với $\xi_1, \xi_2 \ldots$, độc lập với nha cùng phân phối mũ với tham số λ (xem [1]).

Song trong hệ phục vụ xét ở trên ta đã phải giả thiết rằng hệ có số bàn phục không hạn chế, nghĩa là khách hàng không phải chờ đợi. Giả thiết này quá lý tưởn khó có thể thoả mãn trong thực tế. Ta gọi k_i là số khách hàng được phục vụ trong ξ_i. Khi đó để cho tiện ta gọi đoạn ξ_i là chùm k_i, chẳng hạn các đoạn ξ_i có $k_i = 1, 2,$ ta sẽ gọi là các chùm 1, chùm 2, chùm 3,...

Rõ ràng nếu $k_i = 1$, $\forall i$, thì hệ dù chỉ có một bàn phục vụ, nhưng khách đều k

* Nghiên cứu này được hoàn thành với sự hỗ trợ kinh phí của chương trình nghiên cứu cơ bản Qu trong Khoa học Tự nhiên

chờ. Khi đó nếu hệ có nhiều hơn 1 bàn phục vụ thì luôn có ít nhất một bàn không đến.

łếu $k_i \leq 2$, $\forall i$, thì hệ chỉ cần 2 bàn phục vụ cũng đảm bảo phục vụ ngay cho mọi ı hàng.

łếu $k_i \leq 3$, $\forall i$,thì hệ với 3 bàn phục vụ sẽ không làm cho khách hàng phải chờ. Song ıệ chỉ có 2 bàn phục vụ thì khách hàng có thể được phục vụ ngay và cũng có thể chờ.

Nhìn chung nếu số bàn phục vụ càng ít, thời gian phục vụ cho mỗi khách hàng càng số khách hàng đến nhiều thì khả năng phải chờ đợi càng lớn, thời gian chờ đợi càng Dĩ nhiên ta muốn xây dựng một hệ phục vụ sao cho khả năng phải chờ của khách ; không lớn, thời gian chờ đợi có thể chấp nhận được, số bàn phục vụ lại không phí. Để giải quyết bài toán đặt ra, trước hết trong bài báo này ta nghiên cứu về ng độ xuất hiện của chùm 2, chùm 3 cũng như phân phối độ dài của các đoạn chùm ıùm 3, ... tương ứng.

Với giả thiết dòng vào $\{X_i\}$ là quá trình Poisson với cường độ λ, số bàn phục vụ ng hạn chế, thời gian phục vụ cho mỗi khách hàng là như nhau và bằng a, phân i độ dài của khoảng thời gian hệ có khách phục vụ đã được Peter Hall nghiên cứu dủ (xem [1]). Nhưng xét dòng vào là các quá trình con nhận được từ quá trình ıson dừng cường độ λ lại chưa được đề cập đến.

2. CÁC KẾT QUẢ NHẬN ĐƯỢC.

Giả sử dòng vào $\{X_i,\ i = 1, 2, 3, \dots\}$ là quá trình Poisson dừng với cường độ λ. Khách được phục vụ ngay và thời gian phục vụ cho mỗi khách hàng là như nhau và bằng

Gọi ξ là độ dài của đoạn thời gian hệ đang có khách liên tục. Nếu k là số khách ; được phục vụ trong đoạn ξ thì ta gọi ξ là chùm k. Ta có các chùm 1, chùm 2, chùm

Giả sử $\lambda^{(k)}$ là cường độ chùm k, tức là số trung bình các chùm k đối với một đơn ıời gian. Ta có các kết quả sau.

h lý 1. *Với các giả thiết nêu trên ta có*

$$\lambda^{(1)} = \lambda e^{-2a\lambda}$$
$$\lambda^{(2)} = \lambda e^{-2a\lambda}(1 - e^{-\lambda a}),$$
$$\lambda^{(3)} = \frac{\lambda}{2} e^{-2a\lambda}(1 + (1 - \lambda a + 2a)e^{-\lambda a} - 2e^{-2\lambda a})$$

h lý 2. Hàm phân phối xác suất của độ dài chùm 2 có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{a} e^{-\lambda(x-2a)} & a < x \leq 2a, \\ 1 & 2a < x \end{cases}$$

n phân phối chùm 3 có dạng:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{e^{-\lambda x}(x-a)^2}{a^2 e^{-2a\lambda}(2e^{-a\lambda}+1)} & a < x \leq 2a \\ \frac{a e^{-2a\lambda} + 2(x-2a)e^{-\lambda x}}{a e^{-2a\lambda}(2e^{-a\lambda}+1)} & 2a < x \leq 3a \\ 1 & 3a < x \end{cases}$$

3. CHỨNG MINH KẾT QUẢ NHẬN ĐƯỢC

Trước tiên ta chứng minh định lý 1. $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ đơn giản. Ta chỉ cần chứng minh với $\lambda^{(3)}$.

Ký hiệu:

- $\Phi = \{X_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots\}$ là thời điểm đến của khách hàng. Φ là Poisson dừng cường độ λ.

- $\Phi(B) = n$, tức là khoảng B chứa n điểm của quá trình Φ.

- $\Phi \cap B = \{Z\}$, tức là trong khoảng B có điểm Z thuộc quá trình Φ.

Giả sử:

$$
\begin{aligned}
A = \Big\{ & X \in \Phi : \\
& \Phi([X-a, X]) = 0; \Phi([X, X+a]) = 3; \Phi \cap [X, X+a] = \cup\{\{X, Y, Z\} : Y \in [X, X+a] \cap \\
& \Phi \cap [Y, Y+a] = \{Y, Z\}, Z \in [Y, Y+a] \cap \Phi \text{ and } \Phi \cap [Z, Z+a] = \{Z\}\} \Big\} \bigcup \\
& \Big\{ X \in \Phi : \Phi([X-a, X]) = 0, \Phi([X, X+a]) = 2; \\
& \Phi \cap [X, X+a] = \bigcup \{\{X, Y\} : Y \in [X, X+a] \cap \Phi; \\
& \Phi \cap [Y, Y+a] = \{Y, Z\}, Z \in [X+a, Y+a] \cap \Phi, [Z, Z+a] \cap \Phi = \{Z\}\} \Big\}
\end{aligned}
$$

$-\Lambda_{(3)}(B)$ là độ đo cường độ (xem [2]).

Theo định nghĩa $\Lambda^{(3)}(B)$ là số đo trung bình các điểm loại chùm 3 (tức là các đi của Φ thuộc tập A) rơi vào khoảng B.

$$
\Lambda^{(3)}(B) = E(\sum_i I_B(X_i) I_A(X_i))
$$

Dùng định lý Campbell rút gọn (xem [2]) ta nhận được

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{(3)}(B) = \lambda\nu(B).P_0^!\{ & \Phi_0([-a, 0]) = 0, \ \Phi_0([0, a]) = 2 \\
& \bigcup_{Y \in \Phi_0 \cap [0,a]} \Phi_0 \cap [Y, Y+a] = \{Y, Z\}, \bigcup_{Z \in [Y,a] \cap \Phi_0} \Phi_o \cap [Z, Z+a] = \{Z\}\} + \\
+ \lambda\nu(B).P_o^!\{ & \Phi_o([-a, 0]) = 0, \Phi_o([0, a]) = 1, \\
& \bigcup_{Y \in [0,a] \cap \Phi_o} \Phi_o \cap [Y, Y+a] = \{Y, Z\}, \bigcup_{Z \in [a, Y+a] \cap \Phi_o} \Phi_o \cap [Z, Z+a] = \{Z\}\}
\end{aligned}
$$

trong đó

ν: độ đo Lebesgue trong R^1,

$\Phi_o = \Phi \setminus \{0\}$,

P là độ đo xác suất cơ sở của quá trình Φ.

$P_0^!$: phân phối Palm rút gọn (xem [2]).

ì Φ là quá trình Poisson dừng nên $P_o^! = P$ (xem [2]). **Do đó**

$$\Lambda^{(3)} = \lambda\nu(B)\Big[P\Big\{\Phi([-a,0]) = 0, \Phi \cap [0,a] = \{Y, Z\} \quad \text{với}$$

$$Y \in [0,a], Z \in [Y,a]\}; \Phi([a, a+Z]) = 0\Big\}$$

$$+ P\Big\{\Phi([-a,0]) = 0, \quad \Phi \cap [0,a] = \{Y\};$$

$$\Phi \cap [a, a+Y] = \{Z\}, \quad \Phi([Y+a, Z+a]) = 0\}\Big]$$

$$= \lambda\nu(B)\Big[e^{-\lambda a}e^{-\lambda a}\frac{(\lambda a)^2}{2!}\int_0^a \frac{dy}{a}\int_y^a \frac{1}{a}e^{-\lambda z}dz$$

$$+ e^{-\lambda a}.e^{-\lambda a}\lambda a\int_o^a \frac{1}{a}e^{-\lambda y}(\lambda y)dy\int_a^{a+y}\frac{1}{y}e^{-\lambda(z-y)}dz\Big]$$

$$= \lambda\nu(B)e^{-2\lambda a}.\frac{1}{2}(1 + (1 - \lambda a + 2a)e^{-\lambda a} - 2e^{-2\lambda a}).$$

cường độ của chùm 3 là

$$\lambda^{(3)} = \frac{\lambda}{2}e^{-2\lambda a}(1 + (1 - \lambda a + 2a)e^{-\lambda a} - 2e^{-2\lambda a}).$$

lý 1 được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh định lý 2.

Trước hết ta tìm $P\{\xi < x, \ k = 2\}$, tức là phân phối độ dài của chùm 2. Chùm 2 bắt đầu tại X, tức là tại X có một điểm của quá trình Φ. Để độ dài của chùm 2 hơn x thì điểm thứ 2 của chùm phải ở khoảng $(X, X + x - a]$ (độ dài của khoảng bằng $(x - a) < a$ khi $a < x \leq 2a$). Ta bỏ qua, không kể đến điểm của Φ tại X, khi $P_X^! = P$ (xem [2]). Ta có

$$\xi < x, \quad k = 2\} = P_X^!\{\xi < x, \quad k = 1\} = P\{\xi < x, \quad k = 1\}$$

$$= P\{\Phi([X - a, X]) = 0, \Phi([X, X + x - a]) = 1, \Phi([X + x - a, X + x]) = 0\}$$

$$= e^{-\lambda a}.e^{-\lambda(x-a)}\lambda(x - a)e^{-\lambda a} = e^{-\lambda(x+a)}\lambda(x - a).$$

g khi đó

$$P(k = 2) = P_X^!\{\Phi([X - a, X]) = 0, \Phi([X, X + a]) = 1, \Phi([X + a, X + 2a]) = 0\}$$

$$= e^{-\lambda a}.e^{-\lambda a}.\lambda a.e^{-\lambda a} = e^{-3\lambda a}\lambda a.$$

phân phối của chùm 2 là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{P\{\xi < x, k=2\}}{P\{k=2\}} = \frac{1}{a}e^{-\lambda(x-2a)}(x - a) & a < x \leq 2a, \\ 1 & 2a < x \end{cases}$$

ng tự để chứng minh hàm phân phối độ dài chùm 3, ta có:

+ nếu $a < x \leq 2a$:

$$P\{\xi < x, \quad k = 3\} = P_X^!\{\xi < x, \quad k = 2\}$$

$$= P\{\Phi([X - a, X]) = 0, \Phi([X, X + x - a]) = 2, \Phi([X + x - a, X + x]) = 0\}$$

$$= e^{-\lambda a}.e^{-\lambda(x-a)}\frac{\lambda^2(x - a)^2}{2}e^{-\lambda a} = e^{-\lambda(x-a)}\frac{\lambda^2(x - a)^2}{2}$$

+ nếu $2a < x \leq 3a$:

$$P\{\xi < x, \quad k = 3\} = e^{-3\lambda a}\frac{\lambda^2 a^2}{2} + P\{\Phi([X-a,a]) = 0, \Phi([X, X+a]) = 1$$
$$\Phi([X+a, X+x-a]) = 1, \quad \Phi([X+x-a, X+x\}) = 0\} =$$
$$= e^{-3\lambda a}\frac{\lambda^2 a^2}{2} + e^{-\lambda a}.e^{-\lambda a}.\lambda a.e^{-\lambda(x-2a)}\lambda(x-2a).e^{-\lambda a}$$
$$= e^{-3\lambda a}\frac{\lambda^2 a^2}{2} + e^{-\lambda(x+a)}\lambda^2 a(x-2a).$$
$$P\{k=3\} = e^{-3\lambda a}\frac{\lambda^2 a^2}{2} + e^{-4\lambda a}\lambda^2 a^2$$

Vậy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{e^{-\lambda x}(x-a)^2}{2a^2 e^{-3a\lambda} + a^2 e^{-2\lambda a}} & a < x \leq 2a \\ \frac{ae^{-2a\lambda} + 2(x-2a)e^{-\lambda x}}{2ae^{-3a\lambda} + ae^{-2\lambda a}} & 2a < x \leq 3a \\ 1 & 3a < x \end{cases}$$

Định lý 2 được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Peter Hall. *Introduction to the Theory of Coverage Processes.* John Will Sons 1988.
2. D. Stoyan, W.S. Kendall and J. Mecke. *Stochastic Geometry and Its App tions.* Akademie - Verlag Berlin, 1987.

VNU. JOURNAL OF SCIENCE, Nat. Sci., t. XII, n°3, 1996

ON INTENSITIES AND DISTRIBUTIONS OF COVERAGE LENGTHS

Dao Huu Ho

College of Natural Sciences - VNU

We consider a Poisson stream of customers arriving at a service station which an unlimited number of servers. Arrival times are represented by the left-hand enc segments, segment lengths represent service times, and clumps are busy periods (per during which one or more servers are occupied). Let k equal the number of segm comprising a clump, then this clump is called the clump k (k = 1, 2, 3...).

Assume that the Poisson process has the intensity λ, the segment length is fixed equals to a, then the distribution of clump length is considered in [1].

In this paper intensities and distributions of clump lengths are given for clum clump 3. For example, the intensity of clump 3 equals to

$$\lambda^{(3)} = \frac{\lambda}{2}e^{-2a\lambda}(1 + (1 - \lambda a + 2a)e^{-\lambda a} - 2e^{-2\lambda a})$$

The distribution function of clump 3's length has the form:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{e^{-\lambda x}(x-a)^2}{a^2 e^{-2a\lambda}(2e^{-a\lambda}+1)} & a < x \leq 2a \\ \frac{ae^{-2a\lambda} + 2(x-2a)e^{-\lambda x}}{ae^{-2a\lambda}(2e^{-a\lambda}+1)} & 2a < x \leq 3a \\ 1 & 3a < x \end{cases}$$