VECTƠ ĐẶC TRƯNG TRÊN PHÂN THỚ VECTƠ

HOÀNG HỮU ĐƯỜNG, TÔN QUỐC BÌNH

Cho (E, p, B) là một phân thớ vectơ với thớ kiểu R^n, trong đó B là một
ông gian mêtric đủ. Xét một họ các cấu xạ $(X(m), (\chi(m)), m \in N$ của (E,p, B)
n chính nó thỏa mãn điều kiện: với mọi $b \in B$, hạn chế X (m.b) của X(m) trên
ớ $p^{-1}(b)$ không suy biến. Trong [1], V.M. Miliônsikôp đã nghiên cứu các số mũ
iapunôp của họ cấu xạ trên. Nội dung của bài báo này gồm định nghĩa vectơ
ặc trưng [2] của họ cấu xạ đó và chứng minh một số kết quả mở rộng các định
trong [1] cho vec tơ đặc trưng.

Xét họ các cấu xạ $(X(m), \chi(m))$, $m \in N$ của phân thớ vectơ (E, p, B) lên
ính nó có tính chất như trên. Với mỗi $b \in B$ và mỗi $\xi \ni p^{-1}(b)$ ta đặt:

$$\lambda_0(b,\xi) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln |X(m,b)\xi|$$

$$\lambda_1(b,\xi) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\ln m} \ln \left(|X(m,b)\xi| e^{-\lambda_0 m}\right)$$

. . . . .

$$\lambda_j(b,\xi) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\ln_j m} \ln \left(|X(m,b)\xi| e^{-\lambda_0 m} m^{-\lambda_1} \dots (\ln_{j-2} m)^{-\lambda_{j-1}}\right)$$

đây $|X(m, b)\xi|$ là chuẩn Oclit của vectơ

$$X(m, b)\xi \in p^{-1}(\chi(m)b = R^n \text{ và}$$

$$\ln_j m \overset{def}{=} \ln(\ln_{j-1} m)\ \forall_j \geqslant 2)$$

ới giả thiết tất cả các giới hạn trên ở vế phải tồn tại hữu hạn với mọi ξ
hi đó

$$\lambda^{(p)}(b,\xi) \overset{def}{=} (\lambda_0(b,\xi), \lambda_1(b,\xi), \dots, \lambda_p(b,\xi))$$

ược gọi là vec tơ đặc trưng cấp p của $\xi \in p^{-1}(b)$

ể đơn giản, ta viết $\lambda(b,\xi)$ thay cho $\lambda^{(p)}(b,\xi)$ khi không sợ hiểu nhầm). Tập
ợp $\{\lambda(b,\xi), \xi \in p^{-1}(b)\}$ được sắp theo thứ tự từ điển, có nghĩa là:

$\lambda(b,\xi) \leqslant \lambda(b,\eta) \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, p\}$ sao cho

$\lambda_k(b,\xi) \leqslant \lambda_k(b,\eta)$ và $\lambda_m(b,\xi) = \lambda_m(b,\eta)\ \forall_m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

ịnh đề 1:

i) $\lambda(b,\xi) = \lambda(b, c\xi)\ \forall c \in \mathbb{R}\lambda\{o\}$

ii) $\lambda(b, \xi+\eta) \leqslant \max(\lambda(b,\xi), \lambda(b,\eta))$ với mọi ξ và η thuộc $p^{-1}(b)$.

Các tính chất của $\lambda(b, \xi)$ được nêu trong mệnh đề 1 chứng tỏ rằng $\lambda(b, \xi)$ l; một loại số mũ trừu tượng (xem [4]). Do tồn tại cơ sở $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ của khôn gian $p^{-1}(b)$ sao cho tổng $\sum_{i=1}^{n} \lambda(b, \xi_i)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Một cơ sở như vậy đượ gọi là p — chuẩn tắc và các vec tơ đặc trưng tương ứng, được sắp xếp theo th tự tăng dần :

$$\{\lambda(b, \xi_1) \leqslant \lambda(b, \xi_2) \leqslant \ldots \leqslant \lambda(b, \xi_n)\} \quad (1$$

được gọi là p — phổ của cơ sở này.

Mệnh đề 2:

Giả sử $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ và $[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$ là hai cơsở p—chuẩn tắc của không gia $p^{-1}(b)$, $b \in B$, được sắp thứ tự như sau:

$$\lambda(b, \xi_1) \leqslant \lambda(b, \xi_2) \leqslant \ldots \leqslant \lambda(b, \xi_n)$$

$$\lambda(b, \eta_1) \leqslant \lambda(b, \eta_2) \leqslant \ldots \leqslant \lambda(b, \eta_n)$$

Khi đó $\qquad \lambda(b, \xi_i) = \lambda(b, \eta_i) \qquad \forall i \in [1, 2, \ldots, n]$

Do mệnh đề 2, ta có thể gọi (1) là p — phổ của toán tử $X(m, b)$ và kí hiệu

$$\lambda_i(b) \overset{\text{def}}{=} \lambda(b, \xi_i)$$

— *Nhận xét*: Theo định nghĩa, cơ sở p — chuẩn tắc phụ thuộc vào p, nhưn dễ chứng minh rằng $\forall p \geqslant 1$, một cơ sở p — chuẩn tắc cũng là k — chuẩn tắ $\forall k < p$.

Cố định một cơ sở p, chuẩn tắc $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ của $p^{-1}(b)$ Kí hiệu :

$$E_k(b) \overset{\text{def}}{=} [\xi \in p^{-1}(b) \mid \lambda(b, \xi) \leqslant \lambda_k(b)]$$

$$v_k(R^k) \overset{\text{def}}{=} \max_{\substack{\xi \in R^k \\ \xi \neq 0}} \lambda(b, \xi) \quad \text{với } R^k \in G_k(p^{-1}(b))$$

($G_k(p^{-1}(b))$ là đa tạp Graxman các không gian con k chiều của $p^{-1}(b)$)

$[R_0^k(b) \overset{\text{def}}{=} EV[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$: không gian con tuyến tính của $p^{-1}(b)$ sinh bở các vectơ $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k]$.

Mệnh đề 3.

Với mỗi $b \in B$, với $k \in [1, 2, \ldots, n]$, ta có :

i) $\dim E_k(b) \geqslant k$, $\dim E_n(b) = n$

ii) $\dim E_k(b) = k \leftrightarrow \lambda_k(b) < \lambda_{k+1}(b)$.

Mệnh đề 4.

Với mỗi $b \in B$ và mọi $k \in [1, 2, \ldots, n]$, ta có :

i) $v_k(R_0^k(b)) = \lambda_k(b)$

ii) $v_k(R^k) \geqslant \lambda_k(b) \; \forall \; R^k \in_k (p^{-1}(b))$, $R^k \neq R^k_o$

iii) Nếu với $k \in [1, 2, \ldots, n-1]$ và tại b, ta có

$\lambda_k(b) < \lambda_{k+1}(b)$ thì $R^k_o(b)$ là điểm cực tiểu duy nhất của hàm

$$v_k(.) ; G_k(p^{-1}(b)) \to R^{p+1}$$

Hơn nữa $v_k(R^k) \geqslant \lambda_{k+1}(b) > \lambda_k(b) \; \forall R^k \neq R^k_o(b)$

Mệnh đề 5.

Vec tơ đặc trưng $\lambda^{(p)}_k(b) = (\lambda_{k_o}(b), \lambda_{k_1}(b), \ldots, \lambda_{k_p}(b))$ có thể tính được bằng công thức:

$$\lambda_{kl}(b) = \inf_{R^k \in G_k(p^{-1}(b))} \; \sup_{\substack{\xi \in R^k \\ \xi \neq 0}} \; \overline{\lim_{m \to \infty}} \; \frac{1}{\ln_l m} \times$$

$$\times \ln [\,|X(m, b)\,\xi|\, e^{-\lambda_{ko}m}\, m^{-\lambda_{k1}} \ldots (\ln_{l-2} m)^{-\lambda_{k, l-1}}]$$

Nhận xét: Trong mệnh đề 5) có thể thay sup bằng max vì giới hạn trên ở vế phải chỉ nhận nhiều nhất n giá trị khác nhau khi ξ chạy khắp $p^{-1}(b)$. Ta cũng có thể thay inf bằng min vì hàm đạt được cận dưới tại R^k_o.

Mệnh đề 6

$$\lambda_{kl}(b) = \lim_{m \to \infty} \; \lim_{q \to \infty} \; \inf_{R^k \in G_k(p^{-1}(b))} \; \max_{t \in [0, 1, \ldots q]} \; \frac{1}{\ln_l(m+t)} \times$$

$$\times \ln [\, \| X|_{R^k}(m+t, b) \| \, e^{-\lambda_{k_o}(m+t)} \, (m+t)^{-\lambda_{k1}} \ldots \times$$

$$\times (\ln_{l-2}(m+t))^{-\lambda_{k1, l-1}}]$$

ở đây $X_{|R^k}(m+t, b)$ là hạn chế của $X(s, b)$ trên không gian con R^k. Giả sử X là một không gian tôpô.

Kí hiệu $H_p(X)$ là tập hợp tất cả các hàm Berơ lớp p xác định trên X
Khi đó chứng minh được

Bổ đề 1:

Cho S là một không gian tôpô và T là một tập compắc. Giả sử hàm hai biến $f(s, t)$, $s \in S$, $t \in T$ thuộc lớp $H_p(SXT)$. Khi đó các hàm:

$$g_1(.) : S \to R, \quad s \to \min_{t \in T} f(s, t) \qquad \text{và} \qquad g_2(.) : S \to |R, \quad s \to \max_{t \in T} f(s, t)$$

là hàm Berơ lớp p trên S.

Bổ đề 2:

Giả sử (S, π, B) là một phân thớ vectơ với thớ compắc và hàm $f \in H(S)_p$. Khi đó hàm

$$g(.):\ B \to R$$
$$b \to \inf_{s \in p^{-1}(b)} f(s)$$

thuộc lớp $H_p(B)$.

Từ các kết quả trên, có thể chứng minh:

Định lý 1

Với mọi $l \in [0, 1, \dots, p]$ thành phần $\lambda_{kl}(b)$ của vectơ đặc trưng

$\lambda_k(b) = (\lambda_{k_0}(b), \lambda_{k_1}(b), \dots, \lambda_{k_p}(b))$ là hàm Berơ lớp $2l+2$

Kết hợp các tính chất của hàm Berơ (xem [3]) và định lý 1, ta chứng minh được

Định lý 2:

Trong không gian B, tồn tại một tập C trù mật khắp nơi, kiểu G_δ sao cho $\forall k \in [1, 2, \dots n]$, hạn chế của vectơ đặc trưng λ_k trên C là hàm vectơ liên tục trên C mang tôpô cảm sinh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. В.М. Миллионщиков, Бэровские классы функций и показатели ляпунова. Дифференц. уравнения I. 1980 N°1, II 1980 N°9. III 1980 N°10, IV 1981 N°3, V 1981 N°8, VI 1982 N°5, VII 1982 N°6, VIII 1982 N°8, IX 1982 N°9.
2. Хоанг Хыу Дыонг, Теория характеристических векторов и ее приложения к изученню асимптотической уутойчивости решений диф-ных ур-ний, Дифференц. уравнения I 1967 N°3, II 1967 N°10.
3. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin 1935.
4. Б.Л. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий, Теория показателей ляпунова, Москва 1966.

Хоанг Хыу Дыонг, Тон Куок Бинь

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ НА РАССЛОЕНИИ

Рассмотрим семейство морфизмов $(X(m), X(m)) : (E, p, B) \to (E, p, b)$ некоторого векторного расслоения (E, p, B) с слоем R^n, база которого B — польное метрическое пространство. Предположим, что ограничения X(m, B) отображения X(m) на слоях $p^{-1}(b)$ невырождены.

Тогда вводится понятие характеристических векторов [2] для каждого X(m, b) и доказывается, что каждый X(m, b) имеет не более чем n различных характеристических векторов p — ого порядка: $\lambda_1(l) \leqslant \lambda_2(l) \leqslant \dots \lambda_n(l)$.

Доказывается, что l — ый компонент характеристического вектора $\lambda_k(b) = (\lambda_{k_0}(b), \lambda_{k_l}(b), \dots, \lambda_{k_p}(b))$ является бэровской функцией $2l+2$ — ого класса $(k = 1, \dots n)$. Отсюда вытекает, что существует всюду плотное в B множество C такое, что ограничение $\lambda_k(b)$ на оснащенном индуцированную топологию множестве C является непрерывной векторной функцией.

loang Hưu Đương, Tôn Quốc Binh

CHARACTERISTIC VECTORS ON VECTOR BUNDLES

Consider a family of morphisms $(X(m), \chi(m))$ of the vector bundle (E, B) into itself with the fibres of the type R^n, B beling a complete metric space, ich that the restriction $X(m, b)$ of $X(m)$ on each fibre $k^{-1}(b)$ is non-degereratet

Them will be given the definition of characteristic vecrors [2] for each (m, b) and the proof of the fact that every: $X(m, b)$ has atmost n different haracteristic vectors of degree p [2]: $\lambda_1(b) \leqslant \lambda_n(b)$.

The main result of this paper is to prove that every l-th component of the haracteristic vector $\lambda_k(b) = (\lambda_{k_0}(b), \lambda_{k_1}(b), \ldots, \lambda_{kp}(b))$ is a Baire function of lass $21+2$. It fellows the existence of a set C, everywhere dense in B such that ie restriction of $\lambda_k(b)$ on C is vector function, continuous with respect to the iduced topology on C.

Nhận ngày 15-11-1985