# VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA CÁC HỆ VẬT LÝ

LÊ VĂN TRỰC

Nhờ định lý Perôn [2] ta trực tiếp nhận được tiêu chuẩn ổn định của những trạng thái tĩnh.

*Định lý*: Giả sử cho hệ.

$$\dot{X} = AX + F(X),\ F(0) = 0 \tag{2}$$

trong đó A là ma trận hằng số thực, còn F là hàm véctơ thực, liên tục đối với mọi X thuộc lân cận nào đó của gốc tọa độ và giả sử.

$$\lim_{\|X\| \to 0} \frac{\|F(X)\|}{\|X\|} = 0.$$

Khi đó những khẳng định sau được thỏa mãn:

a) Nếu tất cả các giá trị riêng của ma trận A có phần thực âm, thì trạng thái tĩnh của hệ (2) là ổn định tiệm cận.

b) Nếu ít nhất một giá trị riêng của ma trận A có phần thực dương, thì trạng thái tĩnh của hệ (2) không ổn định.

Trong hệ (2) nếu chọn $F(X) = 0$ đối với mọi X, thì ta nhận được tiêu chuẩn ổn định cho hệ tuyến tính ô-tô-nôm.

Ví dụ như ta hãy xét sự ổn định của những trạng thái tĩnh của con lắc toán học được mô tả bởi phương trình vi phân phi tuyến cấp hai.

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + g\sin x = 0 \tag{3}$$

Phương trình (3) tương đương với hệ phương trình vi phân

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g\sin x_1 - 2kx_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Những trạng thái tĩnh là nghiệm của hệ

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -g\sin x_1 - 2kx_2 &= 0 \end{aligned}$$

Hệ này có nghiệm $(n\pi, 0)$, n là số nguyên tùy ý. Do vế phải của hệ (4) là tuần hoàn theo biến $x_1$ với chu kỳ $2\pi$, ta chỉ cần xét bức tranh trạng thái của lân cận điểm (0,0) và $(\pi,0)$ hoặc của hai trạng thái tĩnh tùy ý nằm cách nhau một khoảng $2\pi$ trên trục $x_1$.

Đầu tiên ta hãy xét sự ổn định của trạng thái tĩnh (0,0) vế phải của hệ (4) có dạng $AX + F(X)$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -g, & -2k \end{pmatrix},\ F(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(\sin x_1 - x_1) \end{pmatrix} \tag{5}$$

liền nhiên $F(0) = 0$ và

$$\frac{\|F(X)\|}{\|X\|} = \frac{|g|\,|\sin x_1 - x_1|}{|x_1| + |x_2|} \leqslant |g| \frac{|\sin x_1 - x_1|}{|x_1|} = |g| \left| \frac{\sin x_1}{x_1} - 1 \right|$$

)o đó

$$\lim_{\|X\| \to 0} \frac{\|F(X)\|}{\|X\|} = 0$$

Ia trận A có những giá trị riêng $l_1 = -k + \sqrt{k^2 - g}$, $l_2 = -k - \sqrt{k^2 - g}$.

'a dễ dàng nhận được kết quả sau :

Trạng thái tĩnh của hệ (5) ổn định tiệm cận trong những trường hợp $k^2 > g$, $; > 0$, $k > 0$ và $k^2 < g$, $k, > 0$.

Trạng thái tĩnh (0,0) của hệ (5) không ổn định trong những trường hợp. $\text{ː}^2 > g$, $g < 0$ và $k^2 < g$, $k < 0$.

Theo định lý trên ta không thể nói gì về sự ổn định của trạng thái tĩnh (0,0) rong những trường hợp còn lại.

Để xét sự ổn định của trạng thái tĩnh $(\pi, 0)$ của hệ (4) ta dùng phép thế

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \pi \\ x_2 &= y_2 \end{aligned} \qquad (6)$$

Sau đây ta sẽ nêu ra một hệ quả quan trọng đối với việc áp dụng thực tế của định lý trên.

*Hệ quả* Ta hãy xét hệ ôtônôm phi tuyến trong $R^n$

$$\dot{X} = F(X) \qquad (7)$$

Giả thiết rằng hàm F liên tục trong một miền nào đó $G \subset R^n$ chứa gốc tọa độ 0 và khả vi tại điểm 0. Tính khả vi của hàm F tại điểm 0 nghĩa là tìm được hàm $R : G \to R^n$ sao cho nghiệm đúng đẳng thức

$$F(X) = F(0) + F'(0)X + R(X) \text{ đối với mọi } X \in G \qquad (8$$

trong đó

$$\lim_{\|X\| \to 0} \frac{\|R(X)\|}{\|X\|} = 0 \qquad (9)$$

và ma trận hằng số $F'(0)$ là ma trận Jacôbi của ánh xạ F tại điểm 0.

Nếu gốc tọa độ 0 là trạng thái tĩnh của hệ (7), tức là nếu $F(0) = 0$, thì đẳng thức (8) có dạng

$$F(X) = F'(0)X + R(X) = AX + R(X) \qquad (10$$

Ta có thể viết hệ (7) dưới dạng

$$\dot{X} = AX + R(X).$$

Từ đây ta có khẳng định sau :

Nếu tất cả các giá trị riêng của ma trận Jacôbi $F'(0)$ của ánh xạ F tại 0 có phần thực âm, thì trạng thái tĩnh 0 của hệ (7) ổn định tiệm cận. Nếu ít nhất một giá trị riêng của ma trận Jacôbi $F'(0)$ có phần thực dương, thì trạng thái tĩnh 0 của hệ (7) không ổn định.

Ví dụ như, ta hãy xét sự ổn định của những trạng thái tĩnh của mạch ph
tuyến RC gồm tụ điện C và điện trở phi tuyến R với đặc trưng von ampe $i = g(u$
Nếu tại thời điểm $t = 0$ hiệu điện thế trên hai bản tụ điện là $u_0$, thì hiệu điệ
thế $u(t)$ (thay đổi theo thời gian) trên hai bản tụ điện sẽ thỏa mãn bài toán ba
đầu

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{C}\, g(u)\ ;\ u(0) = u_0.$$

Sau đây ta sẽ chọn mạch mà tụ điện của nó có điện dung đơn vị $C = 1$ v
thành phần phi tuyến là diod với đặc trưng von ampe lập phương.

$$g(u) = -u\,(1-u^2).$$

Nếu ký hiệu biến trạng thái u bằng chữ x thì ta nhận được phương trình v
phân phi tuyến cấp một

$$\dot{x} = x(1-x^2 \qquad (11$$

Phương trình này có ba trạng thái tĩnh, đó là $-1, 0, 1$. Vế phải $f(x) = x - x$
của phương trình (11) là khả vi trên toàn trục x và $f'(x) = 1-3x^2$. Do đó

$$f'(-1) = -2,\ f'(0) = 1,\ f'(1) = -2,$$

cho nên những trạng thái tĩnh $-1$ và 1 ổn định tiệm cận còn trạng thái tĩnh
không ổn định.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


1. E.A. Conddington, N. Levinson ; Theory of ordinary differential equations. M Graw—Hill, New York—Toronto—London 1955.
2. B.P. Đemiđôvit : Lý thuyết ổn định, Mátxcova 1967.



Ле Ван Чык

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этой работе даны некоторые применения метода ляпунова в изучени физических спстем. Также устоновлена устойчивость нескольких конкре ных физических систем

Le Van Truc

ON STABILITY OF PHYSICAL SYSTEMS.

In the paper some applications of Liapunovs direct method for investig tion of physical systems are given. At the same time, stability of some concre physical systems are given. At the same time, stability of some concrete physic systems is established.



Nhận ngày 20-5-198