NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN HIỆP BIẾN TRONG KHÔNG GIAN APHIN LIÊN KẾT

NGUYỄN VĂN THỎA

Để thu được phương trình trường vật lý người ta thường sử dụng nguyên lý biến phân. Phương trình trường khi đó được xem như phương trình Euler-Lagrange. Tuy nhiên để thu được phương trình Euler-Lagrange cần phải thừa nhận, thứ nhất là hệ thức giao hoán giữa toán tử biến phân và đạo hàm riêng.

$$\underset{v}{\delta} \partial_\mu q^\Phi - \partial_\mu \underset{v}{\delta} q^\Phi = 0 \tag{1}$$

và thứ hai là định lý Gauss có dạng [1]

$$\int \partial_\mu f^\mu d\Omega = \int f^\mu n_\mu d\Sigma = 0, \tag{2}$$

ở đây q^Φ là hàm trường, Φ là chỉ số tập thể, f^μ phụ thuộc vào q^Φ và là hàm vectơ mật độ 1.

Hệ thức (1) thường được thừa nhận ở trong hệ tọa độ hôlômôn. Hệ thức (2) đúng nếu giá trị của hàm trường và do đó f^μ tiến đến không ở vô cực.

Hệ thức (1) và (2) có thể được tổng quát hóa trong không gian aphin liên kết,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \overline{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \widehat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \tag{3}$$

ở đây $\overline{\Gamma}$ là hệ số Christoffel của hệ tọa độ cong, còn $\widehat{\Gamma}$ là phần tenxơ của hệ số liên kết Γ.

Thay (3) vào (1) ta được:

$$\underset{v}{\delta} \nabla_\mu q^\Phi - \nabla_\mu \underset{v}{\delta} q^\Phi = \underset{v}{\delta} \Gamma^\Phi_{\psi\mu} q^\psi \tag{4}$$

ở đây

$$\nabla_\mu q^\Phi = \partial_\mu q^\Phi + \Gamma^\Phi_{\psi\mu} q^\psi$$

$$\nabla_\mu \underset{v}{\delta} q^\Phi = \partial_\mu \underset{v}{\delta} q^\Phi + \Gamma^\Phi_{\psi\mu} \underset{v}{\delta} q^\psi,$$

trong trường hợp Φ, ψ có hai chỉ số, ta có

$$\Gamma^{\mu\nu}_{\lambda\sigma,\rho} = \delta^\nu_\sigma \Gamma^\mu_{\lambda\rho} + \delta^\mu_\lambda \Gamma^\nu_{\sigma\rho} \tag{5}$$

Nếu Γ không phụ thuộc vào $q\Phi$ ta có thể đặt:

$$\delta\Gamma^{\Phi}_{\psi\mu} = 0. \qquad (6)$$

Khi đó ta có hệ thức giao hoán:

$$\underset{v}{\delta}\nabla_\mu q^{\Phi} - \nabla_\mu \underset{v}{\delta} q^{\Phi} = 0. \qquad (7)$$

Hệ thức (2) được tổng quát hóa như sau: nếu f^μ là hàm vectơ mật độ 1, ta có [1]

$$\nabla_\mu f^\mu = \partial_\mu f^\mu + 2S^{\mu}_{\lambda\mu} f^{\lambda} \qquad (8)$$

thay vào (2) ta được

$$\int \nabla_\mu f^\mu d\Omega = 2\int S^{\mu}_{\lambda\mu} f^{\lambda} d\Omega \qquad (9)$$

Vì rằng hàm tác dụng của bất kỳ một hệ nào là một đại lượng bất biến nên ta có thể tổng quát hóa hàm tác dụng dưới dạng sau:

$$S = \int L\,(q\Phi,\ \nabla_\mu q\Phi) d\Omega, \qquad (10)$$

ở đây các đạo hàm riêng đã được thay bằng các đạo hàm hiệp biến, $d\Omega$ là phần tử thể tích bốn chiều bất biến.

Lấy biến phân (10) có chú ý đến (7) và (9) ta được:

$$\underset{v}{\delta S} = \left[\frac{\partial L}{\partial q\Phi} - \nabla_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_\mu q\Phi}\right) + 2S^{v}_{\mu v}\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu q\Phi}\right]_{v} \delta q\Phi d\Omega,$$

Cho biến phân của hàm tác dụng bằng không, vì rằng biến phân của hàm trường $q\Phi$ là bất kỳ, ta thu được:

$$\frac{\partial L}{\partial q\Phi}\ \nabla_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu q\Phi} + 2S^{v}_{\mu v}\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu q\Phi} = 0. \qquad (11)$$

Đây là phương trình Euler-Lagrangen trong không gian aphin liên kết.

Ta có thể chứng minh rằng phương trình (11) không thay đổi dạng khi ta chuyển sang hệ tọa độ không hôlônôm. chúng ta biết rằng [2]

$$\overline{\nabla}_\mu h^{k}_{v} = 0, \qquad (12)$$

ở đây h^{k}_{v} là hệ số Lamé tổng quát; đạo hàm hiệp biến tính tương ứng theo hệ số quay Ricci nếu thành phần không hôlônôm (chỉ số la tinh) và tính tương ứng theo hệ số Christoffel nếu thành phần hôlônôm (chỉ số Hy lạp).

Trên cơ sở đó, ta thấy rằng:

$$\nabla_\mu h^{k}_{v} = \nabla_\mu h^{k}_{v} + \widetilde{\gamma}^{k}_{m\mu} h^{m}_{v} - \widehat{\Gamma}^{\lambda}_{v\mu} h^{k}_{\lambda}. \qquad (13)$$

ở đây đạo hàm hiệp biến tính theo hệ số quay Ricci tổng quát nếu thành phần không hôlômôm [3]

$$\gamma^{k}_{mn} = \overline{\gamma}^{k}_{mn} + \widehat{\gamma}^{k}_{mn} \qquad (14)$$

và tính theo hệ số liên kết (3) nếu thành phần hôlônôm.

Vì rằng $\widehat{\Upsilon}$ là phần tenxơ của hệ số liên kết nên ta có

$$\widehat{\Upsilon}^k_{mn} h^k_\lambda h^\mu_m h^\nu_n \widehat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}. \tag{15}$$

Thay (12) và (15) vào (13) ta được

$$\nabla_\mu h^k_\nu = 0. \tag{16}$$

Từ (7) và (16) ta thu được hệ thức giao hoán trong hệ tọa độ không hôlônôm

$$\delta \underset{\nu}{\nabla_\mu} q^N - \underset{\nu}{\nabla_\mu} \delta q^N = 0, \tag{17}$$

ở đây

$$q^N = h^N_\Phi q^\Phi, \quad \delta q^N = h^N_\Phi \delta q^\Phi.$$

N, Φ là các chỉ số tập thể, trong trường hợp chúng có hai chỉ số ta có

$$h^N_\Phi = h^{mn}_{\mu\nu} = h^m_\mu h^n_\nu. \tag{18}$$

Tương tự như vậy ta có định lý Gauss (9) và hàm tác dụng (10) trong hệ tọa độ không hôlômôn:

$$\int \nabla_k f^k d\Omega = 2 \int S^k_{nk} f^n \, d\Omega, \tag{19}$$

$$S = \int L(q^N, \nabla_k q^N) \, d\Omega. \tag{20}$$

Vì hàm tác dụng S là một bất biến nên ta có thể lấy biến phân và sau đó làm tương tự như trên, cuối cùng chúng ta thu được

$$\frac{\partial L}{\partial q^N} - \nabla_k \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_k q^N} \right) + 2S^n_{kn} \frac{\partial L}{\partial \nabla_k q^N} = 0. \tag{21}$$

Phương trình (21) khác phương trình (11) ở chỗ các đạo hàm hiệp biến trong (11) lấy theo hệ số liên kết (3), còn các đạo hàm hiệp biến trong (21) lấy theo hệ số liên kết (14)

Trong trường hợp không gian không có xoắn hoặc tenxơ xoắn phản đối xứng theo cả ba chỉ số ta có

$$\frac{\partial L}{\partial q^N} - \nabla_k \frac{\partial L}{\partial \nabla_k q^N} = 0. \tag{22}$$

Như vậy trong trường hợp này phương trình Euler-Lagrange giữ nguyên dạng kinh điển.

Đối với các trường vô hướng, trường véctơ hàm Lagrange không đổi khi chuyển sang không gian không có xoắn. Do đó từ (22) ta suy ra rằng phương trình các trường trên vẫn giữ nguyên dạng cũ, nhưng đạo hàm riêng phải được thay bằng đạo hàm hiệp biến.

Ta xét một ví dụ về trường vô hướng trong không gian aphin liên kết không có xoắn. Hàm Lagrange trong hệ tọa độ định xứ khi đó có dạng

$$L = \frac{1}{2}\eta^{ik}\Pi_i\,\Pi_k + \rho\theta, \tag{23}$$

$$\eta^{ik} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1 -1),\ \Pi_i = -\nabla_i\theta.$$

Thay (23) vào (22) và chú ý rằng $q^N = \theta$ ta được:

$$\nabla_k\Pi^k = \rho, \tag{24}$$

hay là

$$\overline{\nabla}_k\Pi^k + \widehat{\gamma}^k{}_{nk}\Pi^n = \rho. \tag{25}$$

Đặt
$$\gamma^k{}_{nk} = \delta^k{}_n\Pi_k, \tag{26}$$

Từ (25) ta thu được phương trình trường hấp dẫn vô hướng [4]

$$\overline{\nabla}_k\Pi^k + \Pi_k\Pi^k = \rho. \tag{27}$$

Ý nghĩa và kết quả của trường hấp dẫn vô hướng này được xét trong [5].

Bây giờ chúng ta xét sang điện động lực các hệ quy chiếu phi quán tính; khi đó $\widehat{\gamma} = 0$ và phương trình (22) có dạng:

$$\frac{\partial L}{\partial q^N} - \overline{\nabla}_k\left(\frac{\partial L}{\partial\overline{\nabla}_k q^N}\right) = 0. \tag{28}$$

Cho hàm Lagrange của trường điện từ trong hệ không hòlônôm dưới dạng sau

$$L = -\frac{1}{4}D^{kn}E_{kn} - J^kA_k, \tag{29}$$

ở đây

$$D^{kn} = \varepsilon^{knml}E_{ml},\ E_{kn} = 2\overline{\nabla}_{[k}A_{n]}, \tag{30}$$

ε^{knme} là tenxơ điện từ thấm. Thay (29) vào (28), chú ý rằng ở đây $q^N = A_k$ ta được

$$\overline{\nabla}_kD^{nk} = -j^n,\quad \overline{\nabla}_{[k}E_{mn]} = 0\ . \tag{31}$$

Phương trình (30) và (31) đối với hệ quy chiếu quay được xét trong [6].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Я. Схоутен, Тензорный анализ для физиков, М. 1965
2. Ю. Румер, Исследование по 5-оптике, М. 1956
3. Nguyên văn Thỏa, Tạp chí khoa học, N 2, 27—30. (1985).
4. А.Е. Левашёв, ДАН СССР, 4, 124, (1934)
5. A.E. Levahev, Acta Phys. Polon., V. 23, 647, (1963)
6. А.Е. Левашёв, Nguyễn văn Thỏa, Известия АН БССР, сер. I. N 5, 80,(1971)

Нгуен Ван Тхоа

КОВАРИАНТНЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Коммутативное соотношение, теорема Гаусса и вариационный принцип обобщены в пространстве аффинной связности и вообще в неголономных координатах. Вариационное уравнение имеет вид уравнения Эйлера — Лагранжа. Рассмотрены уравнение скалярного гравитационного поля в пространстве аффинной связности без кручения и уравнения электромагнитного поля в неголономной коорзрдинатной системе.

Nguyen văn Thoa

COVARIANT VARIATIONAL PRINCIPLE IN SPACE OF AFFINE CONNECTION

Commutative relation, Gauss' theorem and variational prinsiple are generalized in space of alfine connection and generally for nonhôlonomic coordinates. Variational equation receive a form of the Euler-Lagrange's equation. The equation of the scalar gravitational field in space of nontwisted affine connection and equations of the electromagnetic field in nonholonomic coordinates system ase considered.

Nhận ngày 20-4-1985