Các phương trình Einstein — Maxwell trong sự tiếp cận trường chuẩn

PHẠM ĐỖ TIẾN

— MỞ ĐẦU

Trong các lý thuyết nhằm tìm sự thống nhất giữa hấp dẫn và điện từ, người ta yêu cầu trường điện từ, cũng như trường hấp dẫn, phải là một biểu hiện của không — thời gian chứ không phải chỉ là một hiện tượng khác biệt cộng thêm vào lý thuyết. Các nỗ lực đầu tiên nhằm giải quyết theo hướng đó đã được thực hiện bởi Kaluza và Klein trong một lý thuyết về không gian 5 chiều [1], và bởi Einstein trong một lý thuyết không — thời gian với mêtric không đối xứng [2]. Do các hệ quả vật lý chưa được thỏa đáng của cả hai lý thuyết nêu trên, nên đến nay bài toán thống nhất hấp dẫn và điện từ vẫn thường xuyên được nhiều tác giả quan tâm giải quyết.

Xuất phát từ một không gian phân thớ trong đó thớ tại mỗi điểm của đa tạp không thời gian được chọn là một đại số biquaternion, trong [3] chúng tôi đã chứng tỏ trường hấp dẫn có thể coi là một trường chuẩn ứng với nhóm đối xứng U(1, Q) là nhóm các biquaternion có chuẩn bằng 1. Tuy nhiên cần chú ý rằng các phương trình thu được không đích thực là phương trình Einstein, mà là dạng Newman — Penrose của phương trình Einstein trong chân không [4]. Trong công trình này, chúng tôi sẽ nêu một phương án khác trong sự tiếp cận trường chuẩn bằng đại số biquaternion, cho phép ta không những thu được lại phương trình Einstein, mà còn suy ra một cách hoàn toàn tự nhiên các phương trình Einstein — Maxwell mô tả trường hấp dẫn và điện từ kết hợp.

2 — HÌNH THỨC LUẬN TRƯỜNG CHUẨN CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH EINSTEIN

Xét đa tạp không – thời gian 4 chiều với hệ tọa độ x^{μ}, và tenxơ mêtric $g_{\mu\nu}$. Tại mỗi điểm x của đa tạp, chúng ta hãy đưa vào một đại số biquaternion với các phần tử cơ sở $\sigma_{\mu}(x)$ thỏa mãn hệ thức:

$$\sigma_{\mu}(x) = \sigma^{+}_{\mu}(x) \tag{2.1}$$

và:

$$\sigma_{\mu}(x).\sigma_{\nu}(x) = g_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

(Xem các định nghĩa và ký hiệu trong [3]).

Các hệ thức trên bất biến đối với phép biến đổi:

$$\delta_{\mu} \rightarrow \sigma'_{\mu} = L(x)\sigma_{\mu} L^{+}(x) \text{ với } L(x) \in U(1, Q, x) \tag{2.3}$$

Như đã trình bày trong [3] yêu cầu bất biến của lý thuyết đối với nhóm định xứ U(1, Q, x) cho phép đưa vào đạo hàm hiệp biến:

$$\nabla_{\mu}\psi = \delta_{\mu}\psi - \Gamma_{\mu}\psi \tag{2.4}$$

rong đó trường vécto biquaternion $\Gamma_\mu(x)$ với tính chất:

$$\bar{\Gamma}_\mu = -\Gamma_\mu \tag{2.5}$$

và quy luật biến đổi:

$$\Gamma_\mu \to L\Gamma_\mu L^{-1} + (\partial_\mu L)L^{-1} \tag{2.6}$$

đóng vai trò thế chuẩn. Trường chuẩn là:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma_\nu - \partial_\nu\Gamma_\mu + [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu] \tag{2.7}$$

có tính chất: $\bar{F}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ (2.8)

và quy luật biến đổi: $F_{\mu\nu} \to LF_{\mu\nu}L^{-1}$ (2.9)

Mối liên hệ của thế chuẩn với liên kết Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ và trường chuẩn với tenxơ cong Riemann được cho bởi các công thức:

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4}\, \partial_\mu\sigma_\nu - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\sigma_\lambda\bar{\sigma}^\nu \tag{2.10}$$

$$F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\, R_{\rho\lambda\mu\nu}\sigma^{\rho}\bar{\sigma}^{\lambda} \tag{2.11}$$

Trong [3], chúng tôi đã xây dựng mật độ Lagrangian của trường chuẩn tự do như trong công trình kinh điển của Yang và Mills [5], tức là coi các thế chuẩn Γ_μ là những biến độc lập. Nhưng như Mach đã chỉ rõ trong [6], tinh thần cơ bản của lý thuyết trường chuẩn không có gì bị vi phạm nếu không coi Γ_μ là những biến độc lập mà phụ thuộc vào những biến cơ bản hơn như trường $\sigma_\mu(x)$ chẳng hạn. Khi đó từ (2.3) và (2.9) ta có mật độ Lagrangian bất biến chuẩn định xứ là:

$$L = \sqrt{-g}F_{\lambda\nu}\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda + \text{l. h. phức} \tag{2.12}$$

Lấy biến phân theo biến cơ bản σ_μ, được phương trình trường:

$$F_{\mu\nu}\sigma^\mu - \frac{1}{2}\sigma_\nu(F_{\xi\rho}\sigma^{\rho}\bar{\sigma}^{\xi}) = 0 \tag{2.13}$$

Đó chính là dạng trường chuẩn của phương trình Einstein trong chân không. Thực vậy, nhân vô hướng hai vế của (2.13) với σ_λ, sau một số phép tính đơn giản ta được phương trình $R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\nu}R = 0$.

3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH EINSTEIN – MAXWELL

Nhóm các phép biến đổi (2.3) rõ ràng có thể mở rộng hơn. Thực vậy, đặt:

$$Q(x) = \exp[iq\lambda(x)]\,L(x) \tag{3.1}$$

trong đó $\lambda(x)$ là một hàm thực tùy ý của tọa độ, q là hằng số. Khi đó hiển nhiên các hệ thức (2.1) và (2.2) bất biến đối với phép biến đổi:

$$\sigma_\mu \to Q(x)\sigma_\mu Q^+(x) \tag{3.2}$$

Dễ thấy nhóm mở rộng này chính là nhóm U(1) x U(1, Q). Yêu cầu bất biến đối với nhóm chuẩn này cho phép đưa vào đạo hàm hiệp biến:

$$\tilde{\nabla}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \tilde{\Gamma}_\mu\psi \tag{3.3}$$

trong đó: $\tilde{\Gamma}_\mu \to Q\tilde{\Gamma}_\mu Q^{-1} + (\partial_\mu Q)Q^{-1}$ (3.4)

Thay Q(x) theo công thức (3.1), từ (3.4) suy ra:

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu + iqA_\mu \tag{3.5}$$

trong đó A_μ là một 4 — vectơ thực thông thường với quy luật biến đổi đối với nhóm chuẩn là:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda \tag{3.6}$$

Trường chuẩn: $\tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{\Gamma}_\nu - \partial_\nu \tilde{\Gamma}_\mu + [\tilde{\Gamma}_\nu, \tilde{\Gamma}_\mu]$ (3.7)

cũng phân thành: $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + iqf_{\mu\nu}$ (3.8)

trong đó: $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (3.9)

với quy luật biến đổi: $f'_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}$ (3.10)

Do đó mật độ Lagrangian của trường chuẩn tự do trong trong trường hợp này là:

$$L_o = \frac{1}{K_g}\sqrt{-g}\, F_{\lambda\nu}.\sigma^\nu\sigma^{-\lambda} - \frac{1}{4}\sqrt{-g}\, f_{\lambda\nu}\, f^{\lambda\nu} \tag{3.11}$$

Nếu có thêm trường vật chất với mật độ Lagrangian L_m, thì Lagrangian toàn phần là:

$$L = L_m + L_o \tag{3.12}$$

Lấy biến phân theo σ_μ và A_μ, được các phương trình:

$$F_{\mu\nu}\sigma^\mu - \frac{1}{2}\sigma_\nu(F_{\xi\rho}.\sigma^\rho\sigma^{-\xi}) = K_g(E_\nu + T_\nu) \tag{3.13}$$

$$f^{\mu\nu};\mu = J^\nu \tag{3.14}$$

trong đó: $E_\nu = \frac{1}{2}\sigma_\lambda f^\lambda_\rho f^\rho_\nu - \frac{1}{4}\sigma_\nu f_{\lambda\mu} f^{\lambda\mu})$ (3.15)

$$\delta L_m = -2\sqrt{-g}\,\delta\sigma^\nu.T_\nu\,;\ \delta L_m = -\sqrt{-g}\,\delta A_\mu J^\mu \tag{3.16}$$

Các phương trình (3.13), (3.14) chính là dạng trường chuẩn của các phương trình Einstein—Maxwell viết theo ngôn ngữ biquaternion.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. V. Bargmann, Rev. Mod. Physics, *29*, 161 (1957)
2. А. Эйнтшейн. Сущность теоории относительности. ИЛ. 1955
3. Phạm đỗ Tiến, Tạp chí Vật lý T 7, N 4, 26—32, (1982)
4. E. Newman, R. Penrose, J. Math. Phys. *3*, 566 (1962)
5. C.N. Yang, R.L. Mills, Phys. Rev. *96*, 191 (1954)
6. G. Mack. Fortschritte der Physik, *29*, 135 (1981)

(xem tiếp trang 61)