TẠP CHÍ KHOA HỌC No 1 - 1993

GIẢI BÀI TOÁN BIÊN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI-TÍCH PHÂN VỚI NHÂN NỬA SUY BIẾN

Phạm Kỳ Anh, Bùi Đức Tiến
Khoa Toán - Cơ - Tin Học ĐHTH Hà Nội

§0. MỞ ĐẦU

g bài báo này ta nghiên cứu việc giải gần đúng bài toán biên của phương trình vi-tích nhân nửa suy biến bằng cách đưa bài toán này về dạng bài toán biên đã được nghiên và áp dụng phương pháp "Seidel-Newton không chính xác". Với ý nghĩa đó bài báo này m như là tiếp tục của bài [2].

khuôn khổ bài báo có hạn. Chúng tôi chỉ đưa ra những kết quả chính mà bỏ qua nhiều n đổi trung gian.

§1. BÀI TOÁN BIÊN PHI TUYẾN

bài toán biên của phương trình vi-tích phân với nhân nửa suy biến (xem [3]) sau:

$$\dot{x} = A(t)x + \int_0^1 K(t,s)f(s,x,\dot{x})ds + g(t,x,\dot{x}), \qquad (1)$$
$$\Gamma x = 0,$$

trong đó $$K(t,s) = \begin{cases} M_1(t)N_1(s) & 0 \le s \le t \le 1 \\ M_2(t)N_2(s) & 0 \le t < s \le 1; \end{cases}$$

$_i \in C([0,1], R^{n\times n})$ $(i = 1,2)$; $\Gamma : C([0,1],\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$ là toán tử tuyến tính liên tục; véc tơ $f(t,\xi,\varsigma)$, $g(t,\xi,\varsigma) \in \mathbf{R}^n$ $(t \in [0,1]; \xi,\varsigma \in \mathbf{R}^n)$ liên tục theo t khả vi theo ξ, ς. nghiệm trong không gian $C^1([0,1],\mathbf{R}^n)$.

1. Dạng phương trình toán tử của bài toán biên

ấp dụng phương pháp Seidel-Newton không chính xác, ta đưa (1) về dạng phương trình

ó một số quy ước sau: ký hiệu A^T là chuyển vị của ma trận (hay véc tơ) A; $(x,u,v)^t :=$ $^T)^T$ (x, u, v là các véc tơ cột); $[\varphi_1,\dots,\varphi_n]$ là không gian con sinh bởi các véc tơ $_n$; $W_1 \times W_2 \times W_3 = \{(w_1,w_2,w_3)^t : w_i \in W_i, i = \overline{1,3}\}$. φ, $\psi \in C([0,1],\mathbf{R}^n)$

$$\langle\varphi,\psi\rangle := \int_0^1 \varphi^T(t)\psi(t)dt; \quad X := C^1([0,1],\mathbf{R}^n), \quad Y := C([0,1].\mathbf{R}^n),$$
$$\overline{X} := C^1([0,1],\mathbf{R}^{3n}), \quad \overline{Y} := C([0,1],\mathbf{R}^{3n}), \quad \overline{Z} := \overline{Y} \times \mathbf{R}^{3n}$$

ông gian Banach với chuẩn sau:

$x \in X, |||x||| = \|x\| + \|\dot{x}\|; \quad y \in Y \ : \|y\| = \max_t |y(t)|;$

$\overline{x} \in \overline{X} \ : |||\overline{x}||| = \|\overline{x}\| + \|\dot{\overline{x}}\|; \quad \overline{y} \in \overline{Y} \ : \|\overline{y}\| = \max |\overline{y}(t)|;$

$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)^T \in \mathbf{R}^n \ : |\xi| = \max |\xi^i|; \quad \overline{\xi} = (\overline{\xi}^1, \ldots, \overline{\xi}^{3n})^T \in \mathbf{R}^{3n} \ : |\overline{\xi}| = \max_{i=1}$

$\overline{z} = (\overline{y}, \overline{r})^t \in \overline{Z}, \ \overline{y} \in \overline{Y}, \ \overline{r} \in \mathbf{R}^{3n} \ : \|\overline{z}\| = \|\overline{y}\| + |\overline{r}|.$

$$\text{Đặt} \quad u(t) = \int_0^t N_1(s) f(s, x, \dot{x}) ds, \quad v(t) = \int_t^1 N_2(s) f(s, x, \dot{x}) ds.$$

Rõ ràng $u, v \in X$, $u(0) = 0$, $v(1) = 0$, $\dot{u}(t) = N_1(t) f(t, x(t), \dot{x}(t))$, $\dot{v}(t) = -N_2(t) f($
Thay vào (1) ta có:

$$\dot{x} = Ax + M_1 u + M_2 v + g(t, x, \dot{x}),$$
$$\Gamma x = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt} \quad & \overline{x} = (x, u, v)^t, \\ & \overline{f}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}) := \big(g(t, x, \dot{x}), N_1(t) f(t, x, \dot{x}), -N_2(t) f(t, x, \dot{x})\big)^t, \\ & \overline{\Gamma} \ : \overline{X} \ni \overline{x} \mapsto \big(\Gamma x, u(0), v(1)\big)^t \in \mathbf{R}^{3n} \quad \text{là toán tử tuyến tính.} \end{aligned}$$

Khi đó, bài toán (1) đưa được về dạng:

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}(t)\overline{x} + \overline{f}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}),$$
$$\overline{\Gamma}\overline{x} = 0,$$

trong đó

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & M_1 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

là ma trận khối, mỗi khối là một ma trận vuông cấp $n \times n$.
Hay dưới dạng toán tử:

$$\overline{\mathcal{A}}\,\overline{x} = \overline{F}(\overline{x}),$$

trong đó $\overline{\mathcal{A}}\,\overline{x} = (\dot{\overline{x}} - \overline{A}\,\overline{x}, \overline{\Gamma}\,\overline{x})$, $\overline{F}(\overline{x}) = (\overline{f}(t, \overline{x}, \dot{\overline{x}}), 0)^t$.

2. Toán tử vi phân tuyến tính

Các bài toán (5), (6), (7) là mở rộng của bài toán đã được nghiên cứu ở [2]:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \dot{x}),$$
$$\Gamma x = 0,$$

hay dưới dạng toán tử: $\mathcal{A}x = F(x)$, trong đó $\mathcal{A}x = (\dot{x} - Ax, \Gamma x)^t$, $F(x) = (f(t, x, \dot{x}), 0$
Ta sẽ so sánh bài toán (6), (7) với bài toán (8).
Xét hai bài toán thuần nhất:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ \Gamma x = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \dot{\overline{x}} = \overline{A}\,\overline{x} \\ \overline{\Gamma}\,\overline{x} = 0. \end{cases}$$

và $\overline{U}$ là các ma trận nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} \dot U = AU \\ U(0) = E \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \dot{\overline{U}} = \overline{A}\,\overline{U} \\ \overline{U}(0) = E, \end{cases} \tag{9}$$

E và $\overline{E}$ là các ma trận đơn vị trong $\mathbf{R}^{n\times n}$ và $\mathbf{R}^{3n\times 3n}$ tương ứng.
ể kiểm tra các tính chất sau:
chất 1. Ma trận khối $\overline{U}$ và $\overline{U}^{-1}$ có cấu trúc sau:

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} U & U_1 & U_2 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad \overline{U}^{-1} = \begin{pmatrix} U^{-1} & -U^{-1}U_1 & -U^{-1}U_2 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{10}$$

trong đó $$U_i(t) = U(t)\int_0^t U^{-1}(s)M_i(s)ds \quad (i = 1,2) \tag{11}$$

định lý Riesz về dạng tổng quát của phiếm hàm tuyến tính trong $C[0,1]$, tồn tại các
rận có biến phân giới nội $\eta \in BV([0,1], \mathbf{R}^{n\times n})$, $\eta \in BV([0,1], \mathbf{R}^{3n\times 3n})$ để:

$$\Gamma x = \int_0^1 d\eta(t)x(t), \qquad \overline{\Gamma}\,\overline{x} = \int_0^1 d\overline{\eta}(t)\overline{x}(t) \tag{12}$$

chất 2. Có thể chọn $\overline{\eta}$ như sau:

$$\overline{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta(t) & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2(t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\eta_1(t) = \begin{cases} -E & \text{khi } t = 0 \\ 0 & \text{khi } 0 < t \le 1 \end{cases}, \quad \eta_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \le t < 1 \\ E & \text{khi } t = 1. \end{cases} \tag{14}$$

ma trận xác định" D và $\overline{D}$ được định nghĩa như sau:

$$D = \int_0^1 d\eta(t)U(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad \overline{D} = \int_0^1 d\overline{\eta}(t)\overline{U}(t) \in \mathbf{R}^{3n\times 3n}.$$

chất 3. Ma trận khối $\overline{D}$ có cấu trúc:

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} D & D_1 & D_2 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{15}$$

trong đó $$D_1 = \int_0^1 d\eta(t)U_1(t), \quad D_2 = \int_0^1 d\eta(t)U_2(t). \tag{16}$$

ng nếu $\operatorname{rank} D = n - \nu$ thì $\operatorname{rank}\overline{D} = 3n - \nu$.
$\{x_i\}_1^\nu$ là cơ sở của $\mathcal{N}(D)$. Đặt

$$\overline{x}_i = (x_i, 0, 0)^t \in \mathbf{R}^{3n} \qquad (i = \overline{1,\nu}) \tag{17}$$

Tính chất 4. $\{\overline{x}_i\}_1^{\nu}$ là một cơ sở của $\mathcal{N}(\overline{D})$.
Giả sử $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)^t$, $w_i \in \mathbf{R}^n$ $(i = \overline{1,3})$.
Tính chất 5. $\overline{w} \in \mathcal{N}(\overline{D}^T)$ khi và chỉ khi

$$w_1 \in \mathcal{N}(D^T), \quad w_2 = -D_1^T w_1, \quad w_3 = -D_2^T w_1.$$

Đặc biệt:
Tính chất 6. Nếu $\{w_1\}_1^{\nu}$ là cơ sở của $\mathcal{N}(D^T)$ thì

$$\{\overline{w}_i := (w_i, -D_1^T w_i, -D_2^T w_i)^t\}_1^{\nu}$$

là cơ sở của $\mathcal{N}(\overline{D}^T)$.

Bằng phép trực chuẩn hóa, ta luôn coi $\overline{w}_i^T \overline{w}_j = \delta_{ij}$ $(i, j = \overline{1,\nu})$.

Bây giờ ta xây dựng cơ sở của $\mathcal{R}(\overline{D})$. Ta tìm $3n - \nu$ véc tơ độc lập tuyến tính như sau: giả sử $\{y_j\}_{\nu+1}^n$ là cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{R}(R)$ và $\{x_j\}_{\nu+1}^n$ thỏa mãn:

$$Dx_j = y_j \qquad (j = \overline{\nu+1, n}).$$

Ký hiệu $\{e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T\}_1^n$ là cơ sở của $\mathbf{R}^n$.
Tính chất 7. Hệ véc tơ

$$\{\{(y_j, 0, 0)^t\}_{\nu+1}^n, \{(D_1 e_i, e_i, 0)^t\}_1^n, \{(D_2 e_i, 0, e_i)^t\}_1^n\}$$

là một cơ sở của $\mathcal{R}(\overline{D})$.

Chứng minh (tóm tắt). Trong $\mathbf{R}^{3n}$, hệ véc tơ

$$\{\overline{x}_j := (x_j, 0, 0)^t \ (j = \overline{\nu+1, n}); \quad \overline{e}_{n+i} := (0, e_i, 0)^t, \ \overline{e}_{2n+i} := (0, 0, e_i)^t \ (i = \overline{1,$$

là nghịch ảnh của hệ (21) qua $\overline{D}$.

Bằng phép trực chuẩn hóa Gram-Smith hệ (21) ta được hệ cơ sở trực chuẩn cỏ $\{\overline{y}_j\}_{\nu+1}^{3n}$,

$$\overline{y}_i^T \overline{y}_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = \overline{\nu+1, 3n}).$$

Nhận xét. Vì $\{\overline{y}_j = (y_j, 0, 0)^t\}_{\nu+1}^n$ đã là $n - \nu$ véc tơ trực chuẩn, nên chỉ còn chuẩn hóa $2n$ véc tơ còn lại của hệ (21).

Ký hiệu $\{\overline{x}_j\}_{\nu+1}^{3n} \subset \mathbf{R}^{3n}$ là các véc tơ thỏa mãn :

$$\overline{D}\,\overline{x}_j = \overline{y}_j.$$

Đặt $\varphi_i(t) = U(t)x_i$ $(i = \overline{1,\nu})$, $\phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_\nu(t))$;
$\overline{\varphi}_i(t) = \overline{U}(t)\overline{x}_i$ $(i = \overline{1,\nu})$, $\overline{\phi}(t) = (\overline{\varphi}_1(t), \ldots, \overline{\varphi}_\nu(t))$.

Tính chất 8.

$$\overline{\varphi}_i(t) = (\varphi_i(t), 0, 0)^t \quad (i = \overline{1,\nu});$$
$$\overline{\phi}(t) = (\phi(0), 0, 0)^t; \quad \overline{\phi}^T(t)\overline{\phi}(t) = \phi^T(t)\phi(t).$$

Trở lại xét các toán tử $\mathcal{A}$ và $\overline{\mathcal{A}}$.

sử $w \in \mathcal{N}(D^T)$, đặt

$$\overline{w} = (w, -D_1^T w, -D_2^T w)^t; \tag{28}$$

$$y^T(t) = w^T \int_0^t d\eta(s) U(s) U^{-1}(t),$$

$$\overline{y}^T = \Big(y^T(t), -y^T(t)U_1(t) + w^T \int_0^t d\eta(s) U_1(s) - w^t D_1 \int_0^t d\eta_1(s),$$

$$- y^T(t)U_2(t) + w^T \int_0^t d\eta(s) U_2(s) - w^T D_2 \int_0^t d\eta_2(s)\Big), \tag{29}$$

[4], dễ chứng minh các khẳng định sau:

nh đề 1.1.

$\mathcal{N}(\overline{\mathcal{A}}) = \{\overline{x} \equiv (x, 0, 0)^t \; |x \in \mathcal{N}(\mathcal{A})\} = \mathcal{N}(\mathcal{A}) x \{0\} x \{0\}$.

Giả sử $(\overline{h}, \overline{u})^t \in \overline{Z}$, $(\overline{h}, \overline{u})^t \in \mathcal{R}(\overline{\mathcal{A}})$ khi và chỉ khi $\langle \overline{y}, \overline{h} \rangle + \overline{w}^T \overline{u} = 0 \; \forall w \in \mathcal{N}(D^T)$, với $\overline{y}$ định từ (28) và (29).

các phép chiếu:

$$Q_0 \; : \; X \ni x \mapsto \phi(t) \Big(\int_0^1 \overline{\phi}^T(t) \overline{\phi}(s) \Big)^{-1} \int_0^1 \phi^T(s) x(s) ds \in X; \tag{30}$$

$$\overline{Q}_0 \; : \overline{X} \ni \overline{x} \equiv (x, u, v)^t \mapsto \overline{\phi}(t) \Big(\int_0^1 \overline{\phi}^T(s) \overline{\phi}(s) \Big)^{-1} \int_0^1 \overline{\phi}^T(s) x(s) ds = (Q_0 x, 0, 0)^t \in X \tag{31}$$

$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{R}(Q_0) = [\varphi_1(t), \; , \varphi_\nu(t)]$, nên $\mathcal{N}(\overline{\mathcal{A}}) = \mathcal{R}(\overline{Q}_0) = [\overline{\varphi}_1(t), \ldots, \overline{\varphi}_\nu(t)]$.

$X_2 = \mathcal{N}(\mathcal{A})$, $\overline{X}_2 = \mathcal{N}(\overline{\mathcal{A}})$, $X_1 = \mathcal{N}(Q_0)$, $\overline{X}_1 = \mathcal{N}(\overline{Q}_0)$, thì $\overline{X} = \mathcal{N}(\overline{Q}_0) \oplus \mathcal{R}(\overline{Q}_0) =$

.

h chất 9.

$$\mathcal{N}(\overline{Q}_0) = \mathcal{N}(Q_0) \times X \times X, \quad \mathcal{R}(\overline{Q}_0) = \mathcal{R}(Q_0) \times \{0\} \times \{0\}.$$

$$\overline{X}_1 = X_1 \times X \times X, \qquad \overline{X}_2 = X_2 \times \{0\} \times \{0\}.$$

$$\psi_i^T(t) = w_i^T \int_0^t d\eta(s) U(s) U^{-1}(t), \quad \overline{\psi}_i^T(t) = \overline{w}_i^T \int_0^t d\overline{\eta}(s) U(s) U^{-1}(t) \quad (i = \overline{1, \nu}). \tag{33}$$

h chất 10. $\overline{\psi}_i^T = (\psi_i^T, \psi_{i_1}^T, \psi_{i_2}^T)$, trong đó

$$w_i^T \Big[- \int_0^t d\eta(s) U(s) U^{-1}(t) U_k(t) + \int_0^t d\eta(s) U_k(s) - D_k \int_0^t d\eta_k(s) \Big], \; (i = \overline{1, \nu}), (k = 1, 2). \tag{34}$$

phép chiếu $\overline{Q}$ trên $\overline{Z}$:

$$\overline{Q} \; : \overline{Z} \ni (\overline{h}, \overline{u})^t \mapsto (0, \sum_1^\nu c_i w_i)^t \in \overline{Z}, \tag{35}$$

trong đó

$$c_i = \langle \overline{\psi}_i, \overline{h} \rangle + \overline{u}^T \overline{w}_i \quad (i = \overline{1, \nu}).$$

Đặt

$$\overline{\Psi} = (\overline{\psi}_1^T, \ldots, \overline{\psi}_\nu^T), \quad \overline{W} = (\overline{w}_1^T, \ldots, \overline{w}_\nu^T),$$

dễ thấy

$$\|\overline{Q}\| \le \tilde{c}, \quad \tilde{c} = \sum_1^\nu |\overline{w}_i| \max\{\max_t |\overline{\Psi}(t)|, |\overline{W}|\}.$$

Gọi $\overline{P} = \overline{I} - \overline{Q}$, trong đó $\overline{I}$ là ánh xạ đồng nhất trong $\overline{Z}$, thì

$$\|\overline{P}\| \le 1 + \tilde{c}.$$

Từ mệnh đề 1.1 ta có $\mathcal{N}(\overline{Q}) = \mathcal{R}(\overline{A})$.
Ký hiệu $\overline{Z}_1 = \mathcal{R}(\overline{A}) = \mathcal{N}(\overline{Q})$, $\overline{Z}_2 = \mathcal{R}(\overline{Q})$. Ta có

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 \oplus \overline{Z}_2.$$

Gọi $\hat{A} = \overline{A}|_{\overline{X}_1}$, thì $\hat{A}$ có nghịch đảo giới nội (xem [2]):

$$\forall (\overline{h}, \overline{u})^t \in \overline{Z}_1 \ : \ \hat{A}^{-1}\begin{pmatrix} \overline{h} \\ \overline{u} \end{pmatrix} = \overline{U}(t)\Big\{ \overline{x}_0 + \int_0^t \overline{U}^{-1}(s)\overline{h}(s)ds \Big\},$$

trong đó $\overline{x}_0 = \sum_1^\nu \alpha_i \overline{x}_i + \sum_{\nu+1}^{3n} \beta_j x_j,$

$$\beta_j = \overline{y}_j^T \Big(\overline{u} - \int_0^1 d\overline{\eta}(t)\overline{U}(t) \int_0^t \overline{U}^{-1}(s)\overline{h}(s)ds\Big) \quad (j = \overline{\nu + 1, 3n})$$

và

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)^T = \overline{M}^{-1} \hat{P}_\alpha,$$

ở đây

$$\overline{M}^{-1} = \int_0^1 \phi^T(t)\phi(t)dt, \quad \hat{P}_\alpha = -(\langle P_\alpha, \overline{\varphi}_1 \rangle, \ldots, \langle P_\alpha, \overline{\varphi}_\nu \rangle)^T,$$

với

$$P_\alpha = \overline{Q}_0\Big(\overline{U}(t)\big(\sum_{\nu+1}^{3n} \beta_j \overline{x}_j + \int_0^t \overline{U}^{-1}(s)\overline{h}(s)ds\big)\Big).$$

Ta có thể đánh giá

$$\|\hat{A}^{-1}\| \le \omega \qquad (\omega \ - \ \text{hằng số}) \text{ như ở [2]}.$$

Sau đây ta sẽ nghiên cứu vế phải của (7).

3. Tóan tử tuyến tính

Tính khả vi của $\overline{F}$ và tính liên tục Lipsit của $\overline{F}'$ liên hệ với các hàm f và g qua m
Mệnh đề 1.2. Giả sử trong miền

$(t,\xi,\varsigma) | t \in [0,1]; \xi, \varsigma \in \mathbf{R}^n;\ |\xi|, |\varsigma| < R\}$, các hàm $g(t,\xi,\varsigma)$ và $f(t,\xi,\varsigma)$ liên tục theo t, ξ và ς. Hơn nữa, giả sử:

$$i/\quad \|g'_\xi(t,\xi,\varsigma)\| \le a_1, \quad \|g'_\varsigma(t,\xi,\varsigma)\| \le a_1,$$
$$\|f'_\xi(t,\xi,\varsigma)\| \le a_2, \quad \|f'_\varsigma(t,\xi,\varsigma)\| \le a_2, \quad \forall (t,\xi,\varsigma) \in \Delta. \tag{47}$$

$$ii/\quad \|g'_\xi(t,\xi_1,\varsigma_1) - g'_\xi(t,\xi_2,\varsigma_2)\| \le b_1\big(|\xi_1-\xi_2| + |\varsigma_1-\varsigma_2|\big),$$
$$\|g'_\varsigma(t,\xi_1,\varsigma_1) - g'_\varsigma(t,\xi_2,\varsigma_2)\| \le b_1\big(|\xi_1-\xi_2| + |\varsigma_1-\varsigma_2|\big),$$
$$\|f'_\xi(t,\xi_1,\varsigma_1) - f'_\xi(t,\xi_2,\varsigma_2)\| \le b_2\big(|\xi_1-\xi_2| + |\varsigma_1-\varsigma_2|\big),$$
$$\|f'_\varsigma(t,\xi_1,\varsigma_1) - f'_\varsigma(t,\xi_2,\varsigma_2)\| \le b_2\big(|\xi_1-\xi_2| + |\varsigma_1-\varsigma_2|\big),$$
$$\forall (t,\xi_1,\varsigma_1),\ (t,\xi_2,\varsigma_2) \in \Delta. \tag{48}$$

ó hàm $\overline{F}(\overline{x})$ khả vi liên tục trong miền $\overline{\Omega} = \{\overline{x} \equiv (x,u,v)^t \mid \|x\| < R,\ \|\dot{x}\| < R\}$ và ủa nó thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$\|\overline{F}'(\overline{x})\| \le a, \quad \|\overline{F}'(\overline{x}) - \overline{F}'(\overline{y})\| \le b\|\overline{x}-\overline{y}\|, \quad \forall \overline{x},\overline{y} \in \overline{\Omega}, \tag{49}$$

$= \max(a_1, Na_2)$, $b = \max(b_1, Nb_2)$, $N = \max(\|N_1\|, \|N_2\|)$.

n g m i n h (tóm tắt). Ký hiệu

$= \{(t,\overline{\xi},\overline{\varsigma})|_{t\in[0,1]};\ \overline{\xi} \equiv (\xi,\xi_1,\xi_2)^t \in \mathbf{R}^{3n},\ \overline{\varsigma} = (\varsigma,\varsigma_1,\varsigma_2)^t \in \mathbf{R}^{3n},\ (t,\xi,\varsigma) \in \Delta\}$.

chiếu π : $\pi(\overline{\xi}) = \xi$, ta có $\|\pi\| = 1$.

) ta có:

$$\overline{f}'_\xi(t,\overline{\xi},\overline{\varsigma}) = \big(g'_\xi(t,\xi,\varsigma)\pi,\ N_1(t)f'_\xi(t,\xi,\varsigma)\pi,\ -N_2(t)f'_\xi(t,\xi,\varsigma)\pi\big)^t.$$

$$\|\overline{f}'_\xi(t,\overline{\xi},\overline{\varsigma})\| \le \max\big(\|g'_\xi(t,\xi,\varsigma)\|,\ N\|f'_\xi(t,\xi,\varsigma)\|\big) \le a, \quad \forall (t,\overline{\xi},\overline{\varsigma}) \in \overline{\Delta}.$$

$\|f'_\xi(t,\overline{\xi},\overline{\varsigma})\| \le a,\ \forall (t,\overline{\xi},\overline{\varsigma}) \in \overline{\Delta}$.

àm $\overline{F}$ với $\forall \overline{x} \in \overline{\Omega}$, $\overline{h} \in \overline{X}$ ta có:

$$\overline{F}'(\overline{x})\overline{h} = \big(\overline{f}'_{\overline{\xi}}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}})\overline{h} + \overline{f}'_{\overline{\varsigma}}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}})\dot{\overline{h}}, 0\big)^t. \quad \text{Suy ra}$$
$$\|F'(\overline{x})\overline{h}\| \le a(\|\overline{h}\| + \|\dot{\overline{h}}\|) = a\|\|h\|\| \Rightarrow \|\overline{F}'(\overline{x})\| \le a, \quad \forall \overline{x} \in \overline{\Omega}.$$

tự ta chứng minh được tính Lipsit của $\overline{F}'$.

$\overline{Q}\,\overline{F}'(\cdot)]_{\overline{X}_2}$ là hạn chế của $\overline{Q}\,\overline{F}'(\overline{x})$ trên X_2. Biểu diễn của nó được phát biểu như sau:

h đề 1.3. Giả sử $\overline{F}$ khả vi tại $\overline{x} \equiv (x,u,v)^t \in \overline{X}$, $\forall \overline{h} \equiv \sum_1^\nu d_k\overline{\varphi}_k \in \overline{X}_2$ ta có:

$$[\overline{Q}\,\overline{F}'(x)]_{\overline{X}_2}\overline{h} = \Big(0, \sum_1^\nu c_i\overline{w}_i\Big)^t, \tag{50}$$

ng đó
$$c_i = \sum_1^\nu s_{ik}d_k \quad (i = \overline{1,\nu}), \tag{51}$$

$$s_{ik} = \int_0^1 \psi_i^T(t)\big[g'_\xi(t,x,\dot{x}) + g'_\xi(t,x,\dot{x})A\big]\varphi_k(t)dt +$$
$$+ \int_0^1 \big[\psi_i^{1T}(t)N_1(t) - \psi_i^{2T}N_2(t)\big]\big[f'_\xi(t,x,\dot{x}) + f'_\varsigma(t,x,\dot{x})A\big]\varphi_k(t)dt. \tag{52}$$

minh mệnh đề này bằng cách thay $F'(x)h$ vào (36) với chú ý rằng $\overline{h} \in \overline{X}_2$ nên $\dot{\overline{h}} = \overline{A}\,\overline{h}$. a trận $S = S(\overline{x}) = (s_{ik})_{ik}$ $(i,k = \overline{1,\nu})$. Từ [2] dễ chứng minh mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.4. Giả sử ma trận $S(x)$ là không suy biến và $|S^{-1}(x)| \le \gamma_0 \quad \forall \overline{x} \in$ $[\overline{Q}\overline{F}'(x)]_{\overline{X}_2}$ có nghịch đảo giới nội đều:

$$\|[\overline{Q}\,\overline{F}'(\overline{x})]^{-1}_{\overline{X}_2}\| \le \gamma.$$

trong đó

$$\gamma = \gamma_0\big(1 + \max_t[\,|A(t)| + |M_1(t)| + |M_2(t)|\big)|\overline{W}|\sum_1^{\nu}\|\varphi_i\|.$$

4. Dãy nghiệm gần đúng

Ta sẽ xây dựng dãy nghiệm gần đúng của bài toán (7) bằng phương pháp Sei không chính xác.

Giả thiết rằng các hàm $f(t,\xi,\varsigma)$, $g(t,\xi,\varsigma)$ của bài toán (1) trên miền Δ thỏa mã 1.2. Khi đó các đánh giá sau suy từ các công thức (38), (39) và (50): $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \overline{\Omega}$

$$\|\overline{Q}\,\overline{F}'(\overline{x}) \le \beta \equiv \tilde{c}a, \quad \|\overline{P}\,\overline{F}'(\overline{x}) \le \alpha \equiv (1+\tilde{c})a,$$
$$\|\overline{Q}\,\overline{F}'(\overline{x}) - \overline{Q}\,\overline{F}'(\overline{y})\| \le L\|\|\overline{x} - \overline{y}\|\|, \quad L = \tilde{c}b.$$

Giả sử có xấp xỉ ban đầu $\overline{x}^{(0)} \in \overline{\Omega}$, $\|\|\overline{x}^{(0)}\|\| < R$. Ký hiệu $\overline{f}^{(0)}(t) = \overline{f}(t, \overline{x}^{(0)},$ $r := R - \|\|\overline{x}^{(0)}\|\|$,

$$\delta = \beta\gamma\omega\Big\{\max\big|\dot{\overline{x}}^{(0)}(t) - \overline{A}(t)\overline{x}^{(0)}(t) - \overline{f}^{(0)}(t)\big| + \big|\overline{\Gamma}\overline{x}^{(0)} - \sum_1^{\nu} c_i^{(0)}\overline{w}_i\big|\Big\} + \gamma\big|\sum_1^{\nu} c_i^{(0)}\overline{w}_i$$

trong đó $c_i^{(0)} = \langle \overline{f}^{(0)}, \overline{\psi}_i\rangle \quad (i = \overline{1,\nu})$.

Giả sử đã biết xấp xỉ thứ k: $\overline{x}^{(k)}$, ta tìm xấp xỉ thứ $k+1$ như sau:

Đặt

$$\overline{v}^{(k)} := \overline{Q}_0\overline{x}^{(k)},$$
$$\overline{z}^{(k+1)} := \hat{A}^{-1}\overline{P}\,\overline{F}(\overline{x}^{(k)}),$$
$$\tilde{x}^{(k)} := \overline{z}^{(k+1)} + \overline{v}^{(k)}.$$

Ký hiệu

$$\tilde{f}^{(k)}(t) = \overline{f}(t, \tilde{x}^{(k)}, \dot{\tilde{x}}^{(k)}), \quad \tilde{f}^{(k)}_{\xi}(t) = \overline{f}'_{\xi}(t, \tilde{x}^{(k)}, \dot{\tilde{x}}^{(k)}, \quad \tilde{f}^{(k)}_{\varsigma}(t) = \overline{f}'_{\varsigma}(t, \tilde{x}^{(k)}, \dots \tilde{x}^{(k)})$$

"Lượng điều chỉnh" $\overline{\mu}^{(k)}$ cho thành phần $\overline{v}^{(k)}$ được tìm từ điều kiện:

$$\big\|[\overline{Q}\,\overline{F}'(\tilde{x}^{(k)})]_{\overline{X}_2}\overline{\mu}^{(k)} + \overline{Q}\,\overline{F}(\tilde{x}^{(k)})\big\| \le \tau\|\overline{Q}\,\overline{F}(\tilde{x}^{(k)})\|,$$

trong đó $\tau \in (0,1)$ là một số cố định.

Vì

$$\overline{\mu}^{(k)} \in \overline{X}_2 \Rightarrow \overline{\mu}^{(k)} = \sum_1^{\nu} d_i^{(k)}\overline{\varphi}_i = \big(\sum_1^{\nu} d_i^{(k)}\varphi_i, 0, 0\big)^t.$$

$d^{(k)} \equiv (d_1^{(k)}, \dots, d_\nu^{(k)})$ để $\overline{\mu}^{(k)}$ thỏa mãn (60). Đặt

$$:= \langle \bar{f}^{(k)}, \overline{\psi}_i \rangle, \quad \tilde{c}^{(k)} \equiv (\tilde{c}_1^{(k)}, \dots, \tilde{c}_\nu^{(k)})^T, \quad \overline{w}^{(k)} := \sum_1^\nu \tilde{c}_i^{(k)} \overline{w}_i, \quad S^{(k)} := S(\tilde{x}^{(k)}).$$

sao cho:

$$|S^{(k)} d^{(k)} + \tilde{c}^{(k)}| \le r |\overline{w}^{(k)}| / (\sum_1^\nu |\overline{w}_i|).$$

$^{(k)}$ tính theo (61) thỏa mãn (60).

$$\overline{v}^{(k+1)} := \overline{v}^{(k)} + \overline{\mu}^{(k)} \tag{62}$$

thứ $k+1$

$$\overline{x}^{(k+1)} := \overline{z}^{(k+1)} + \overline{v}^{(k+1)} \tag{63}$$

lý về điều kiện đủ (xem [2]) để dãy $\overline{x}^{(k)}$ xây dựng theo các công thức (56)-(63) hội tụ biểu trong trường hợp này như sau.

lý 1.5. Giả sử điều kiện của các mệnh đề 1.2 và 1.4 thỏa mãn. Hơn nữa, giả thiết $2\alpha\beta\gamma\omega + L\beta\gamma^2\delta/2 < 1$ và $2\delta(1-q)^{-1} < r$. Khi đó tồn tại $r \in (0,1)$ để dãy $\{\overline{x}^{(k)}\}$ hội t nghiệm $\overline{x}^*$ của bài toán (7) với tốc độ: $|||\overline{x}^{(k)} - \overline{x}^*||| \le r q_1^k$, trong đó $q_1 \in (0,1)$ là một

2 sau đây sẽ là ví dụ áp dụng: giải bài toán biên của phương trình vi-tích phân bậc 2 suy biến.

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI-TÍCH PHÂN BẬC HAI

ài toán biên tuần hoàn sau:

$$\ddot{x}^1 = g_1(t, x^1, \dot{x}^1) + \int_0^1 k_1(t,s) f_1(t, x^1, \dot{x}^1) ds, \tag{1}$$

$$x^1(0) = x^1(1), \qquad \dot{x}^1(0) = \dot{x}^1(1), \tag{2}$$

$$k_1(t,s) = \begin{cases} n_1(s) & 0 \le s \le t \le 1 \\ n_2(s) & 0 \le t < s \le 1, \end{cases}$$

$1], \mathbf{R})$ $(i = 1,2)$; các hàm $f_1(t, \xi, \varsigma)$, $g_1(t, \xi, \varsigma)$ liên tục theo $t \in [0,1]$, khả vi theo ξ,

ghiệm trong không gian $C^2([0,1], \mathbf{R})$.

i bài toán này, trước hết ta đưa nó về bài toán (1) ở §1 với $n = 2$.

$:= \dot{x}^1$, $x := (x^1, x^2)^T$; $g(t,x,\dot{x}) := (0, g_1(t, x^1, \dot{x}^1))^T$, $f(t,x,\dot{x}) := (0, f_1(t, x^1, \dot{x}^1))^T$; $- x(0)$;

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n_i(t) \end{pmatrix} \quad (i = 1,2),$$

$$K(t,s) = \begin{cases} M_1(t)N_1(s) & 0 \le s \le t \le 1 \\ M_2(t)N_2(s) & 0 \le t < s \le 1; \end{cases}$$

và bài toán (1), (2) có dạng:

$$\dot{x} = A(t)x + \int_0^1 K(t,s)f(s,x,\dot{x})ds + g(t,x,\dot{x})$$

$$\Gamma x = 0.$$

Hay

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}(t)\overline{x} + \overline{f}(t,\overline{x},\dot{\overline{x}}),$$
$$\overline{\Gamma}\,\overline{x} = 0.$$

Tìm các ma trận nghiệm cơ bản U và U^{-1} như sau:

$$U(t) = e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1}(t) = e^{-tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Từ đó tính được $U_1(t)$, $U_2(t)$ và cuối cùng là $\overline{U}(t)$ và $\overline{U}^1(t)$.

Chọn

$$\eta(t) = \begin{cases} E & t = 0,1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases} \in BV[0,1] \quad \text{thì} \quad \Gamma x = \int_0^1 d\eta(x)x(t).$$

Các ma trận xác định tính được như sau:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

từ (1.15) tính được $\overline{D}$. Rank $\overline{D} = 5$, dễ kiểm tra các điều kiện sau:

$$\mathcal{N}(D^T) = [(0,1)^T] =: [w_1], \quad \mathcal{N}(D) = [(1,0)^T] =: [x_1],$$
$$\mathcal{N}(\overline{D}) = [\overline{x}_1] \equiv [(x_1,0,0)^t] = [(1,0,0,0,0,0)^T],$$
$$\mathcal{N}(\overline{D}^T) = [w_1],$$

trong đó $\overline{w}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^T$ là chuẩn hóa của véc tơ $\left(w_1, -D_1^T w_1, -D_2^T w_1\right)^t$.

$\mathcal{R}(D) = [(1,0)^T] := [y_2]$, $\mathcal{R}(\overline{D}) = [\overline{y}_2, \overline{y}_3, \overline{y}_4, \overline{y}_5, \overline{y}_6]$ trong đó $\overline{y}_2 = (1,0,0,0,0,0)$ $(0,0,1,0,0,0)^T$, $\overline{y}_4 = (0,0,0,0,1,0)^T$, $\overline{y}_5 = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T$, $\overline{y}_6 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right.$ là các véc tơ trực chuẩn hóa từ các véc tơ: $(y_2,0,0)^t$, $(D_1e_1, e_1, 0)^T$, $(D_2e_1, 0, e_1)^t$, $(D_1e$ $(D_2e_2, 0, e_2)^T$.

Nếu lấy

$$\overline{x}_2 = (0,1,0,0,0,0)^T, \quad \overline{x}_3 = (0,0,1,0,0,0)^F,$$
$$\overline{x}_4 = (0,0,0,0,1,0)^T, \quad \overline{x}_5 = \left(0, \frac{-1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T,$$
$$\overline{x}_6 = \left(0, \frac{-1}{2\sqrt{6}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^T$$

$(j = \overline{2,6})$ thỏa mãn $\overline{D}\,\overline{x}_j = \overline{y}_j \quad (j = \overline{2,6})$.

ó $\overline{\varphi}_1(t) = (1,0,0,0,0,0)^T = \overline{\phi}(t)$

ác kết quả trên ta tính được

$$\overline{\psi}_1^T = \begin{cases} O^T & \text{khi} \quad t = 0,1 \\ (0, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}, 0, \dfrac{t-1}{\sqrt{3}}, 0, \dfrac{t}{\sqrt{3}}) & \text{khi} \quad 0 < t < 1. \end{cases}$$

phép chiếu $\overline{Q}_0$ và $\overline{Q}$ có dạng:

$$\overline{Q}_0 \; : \; \overline{Z} \ni \overline{x} \equiv (x^1, \ldots, x^6) \mapsto \Big(\int_0^1 x^1(s)ds, 0,0,0,0,0 \Big)^T \in \overline{X},$$

$$\overline{Q} \; : \; \overline{Z} \ni (\overline{h}, \overline{u}) \mapsto (0, c_1 \overline{w}_1)^t \in \overline{Z}, \quad \text{trong đó}$$

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Big\{ \int_0^1 [-h^2(t) + (t-1)h^4(t) + th^6(t)]\,dt + (u^2 - u^4 - u^6) \Big\}.$$

giờ ta xây dựng dãy nghiệm gần đúng.

xấp xỉ thứ k đã biết: $\overline{x}^{(k)} = \big(x^{(k)1}, \ldots, x^{(k)6}\big)$, ta tìm xấp xỉ thứ $k+1$ như sau.

$$\overline{v}^{(k)} := \overline{Q}_0 \overline{x}^{(k)} = \Big(\int_0^1 x^{(k)1}(s)ds, 0,0,0,0,0 \Big)^T;$$

$$c_1^{(k)} = \frac{1}{3} \int_0^1 \{ -g(t, x^{(k)1}, \dot{x}^{(k)1} + [(t-1)n_1(t) - tn_2(t)] f_1(t, x^{(k)1}, \dot{x}^{(k)1}) \} dt;$$

$$\overline{y}^{(k)} = (y^{(k)1}, \ldots, y^{(k)6})^T := -c_1^{(k)} \overline{w}_1 - \int_0^1 d\overline{\eta}(t) \overline{U}(t) \int_0^t \overline{U}^{-1} \overline{f}^{(k)}(s) ds.$$

$$\beta_2^{(k)} = y^{(k)1}, \quad \beta_3^{(k)} = y^{(k)3}, \quad \beta_4^{(k)} = y^{(k)5},$$

$$\beta_5^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y^{(k)2} + y^{(k)4}), \quad \beta_6^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(y^{(k)2} - y^{(k)4}) + \sqrt{\frac{2}{3}} y^{(k)6},$$

 tính theo công thức:

$$(\alpha_1^{(k)}, 0,0,0,0,0)^T = \overline{Q}_0 \Big[\overline{U}(t) \Big(\sum_2^6 \beta_j^{(k)} \overline{x}_j + \int_0^t \overline{U}^{-1}(s) \overline{f}^{(k)}(s) ds \Big) \Big].$$

h phần đầu tiên của xấp xỉ thứ $(k+1)$ là:

$$\overline{z}^{(k+1)} = \overline{U}(t) \Big[\alpha_1^{(k)} \overline{x}_1 + \sum_2^6 B_j^{(k)} \overline{x}_j + \int_0^t \overline{U}^{-1}(s) \overline{f}^{(k)}(s) ds \Big].$$

Ta có $\bar{x}^{(k)} := \bar{z}^{(k+1)} + \bar{v}^{(k)}$.

"Lượng điều chỉnh" $\bar{\mu}^{(k)}$ có thể chọn theo bổ đề sau.

Bổ đề. Đặt $d^{(k)} = -\langle\psi_1, f^{(k)}\rangle / S(\bar{x}^{(k)})$, trong đó

$$S(\bar{x}^{(k)}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 \{g'_{1\xi}(t, \bar{x}^{(k)1}, \dot{\bar{x}}^{(k)1}) + [(1-t)n_1(t) + tn_2(t)] f'_{1\xi}(t, \bar{x}^{(k)1}, \dot{\bar{x}}^{(k)1}$$

Khi đó $\bar{\mu}^{(k)} = d^{(k)}\varphi_1 = (d^{(k)}, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ thỏa mãn điều kiện (1.60).

Sau đó $\bar{v}^{(k+1)} := \bar{v}^{(k)} + \bar{\mu}^{(k)}$, và xấp xỉ thứ $k+1$: $\bar{x}^{(k+1)} := \bar{z}^{(k+1)} + \bar{v}^{(k+1)}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Axelsson O. On global convergence of iterative methods. In Lecture notes in math. v. 9 solution of nonlinear systems of equations". Springer verlag 1982, pp. 1-9.
2. Pham Ky Anh, Bui Duc Tien. An inexact Seidel-Newton method for nonlinear bo problems. Acta Math. Viet. 1992, v. 17, No. 2.
3. Golberg M. A. Boundary and initial-value methods for solving Fredholm Equations grenerate kernels. J. Optim. Theory Appl. 1978, v. 24, No. 1, pp. 89-131.
4. Sweet D. An allternative method for weekly nonlinear BVPs. Nonlinear Anal. Th. 1984, v. 8, No. 5, pp. 421-428.

ON NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SEMI-DEGENERATED KE

Pham Ky Anh, Bui Duc Tien

Faculty of Mathematic - Mechanic - Informatics Hanoi University

This report is concerned with the solvability and approximate solution of the foll linear boundary-value problem:

$$\dot{x} = A(.)x + \int_0^1 K(., s) f(s, x, \dot{x}) ds + g(, .x, \dot{x}); \quad \Gamma x = 0,$$

where

$$K(t, s) = \begin{cases} M_1(t)N_1(s) & 0 \le s \le t \le 1 \\ M_2(t)N_2(s) & 0 \le t < s \le 1 \end{cases}$$

A, M_i, $N_i \in C([0,1], \mathbf{R}^{n\times n})$ $(i = 1, 2)$; $x, f, g \in \mathbf{R}^n$ and $\Gamma : C([0, q], \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}^n$ is linear operator.