VỀ MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VỚI BỘ TOÁN TỬ GIAO HOÁN

NGUYỄN VĂN MẬU

Trong bài này sẽ chỉ ra rằng với một số giả thiết về tính giao hoán và khả hịch đối với bộ toán tử:

$$\hat{T} \doteq \{T_1, T_2, ...; T_n\} \tag{1}$$

có thể chuyển hầu hết các kết quả quen biết của lớp toán tử đại số:

$$\hat{S} = [S-t_1I, S-t_2I, ..., S-t_nI]$$

ng lớp toán tử sinh bởi T. Mô hình đưa ra ở đây đã khái quát hóa được nhiều ô hình toán tử kỳ dị trừu tượng riêng rẽ được xét trong [1–5].

1. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên C. L (X) là đại số các toán tử yến tính tác dụng trong X:

$$L(X) = [A : X \to X, \mathcal{D}(A) = X, J_m A \subset X]$$

Giả sử trong L (X) cho bộ toán tử $\hat{T}$ dạng (1) có các tính chất sau:

1) $[T_i, T_j] = T_iT_j - T_jT_i = 0$

2) $T_{ij} = T_i - T_j$ khả nghịch khi $i \neq j$, tức tồn tại R_{ij} sao cho $T_{ij}R_{ij} = R_{ij}T_{ij} = I$ - đơn vị trong L (X)

Ký hiệu $S(\hat{T})$ là tâm đại số của $\hat{T}$ trong L (X):

$(\hat{T}) := [A \in L(X) : [A, T_j] = 0 \quad j = 1, 2, ... n]$

ễ thấy rằng $aI \in S(\hat{T})$ $\forall a \in C$; $T_i, R_{ij} \in S(\hat{T})$; A_{ij} ứng với mỗi $T \in S(\hat{T})$ ta đặt

$$P_i(T) = \prod_{j \neq i} (T - T_j) R_{ij}; \quad i = 1, 2, ... n \tag{2}$$

ử dụng công thức nội suy Lagrange [1], ta dễ dàng chứng minh

ổ đề 1: $\sum_{j=1}^{n} P_j(T) = I, \quad \forall T \in S(\hat{T})$ (3)

Thật vậy, từ (2) ta có ngay $P_i(T_j) = \delta_{ij}I$ trong đó δ_{ij} — simbôn Kronecker. ừ đó suy ra:

$$Q(T_i) = \sum_{j=1}^{n} P_j(T_i) - I = 0 \quad \forall i$$

ay

$$Q(T) := \sum_{j=1}^{n} P_j(T) = I = 0 \quad ; \quad \forall T \in S(\hat{T}). \text{ đpcm}$$

Bổ đề 2: **Nếu** $T \in S(T)$ **và** $\prod_{j=1}^{n} (T - T_j)$ thì $P_i(T)$; $i = 1,2,\ldots,n$ **lập thành bộ toán** chiếu trực giao:

$$P_i(T)\, P_j(T) = \delta_{ij}\, P_j(T) \qquad ($$

Chứng minh. Thật vậy, khi $i \neq j$ thì

$$P_i(T)\, P_j(T) = \prod_{k \neq i} (T - T_k)\, R_{ki} \prod_{m \neq j} (T - T_m)\, R_{mj} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (T - T_k) \prod_{m \neq ij} (T - T_m) \prod_{k \neq i} R_{ki} \prod_{m \neq j} R_{mj} = 0$$

Tiếp theo, từ (3) suy ra

$$\sum_{j=1}^{n} P_i(T)\, P_j(T) = P_j(T) \text{ hay } P_j(T)\, P_j(T) = P_j(T) \text{ đpcm}$$

Trường hợp riêng, khi $T = 0$ ta đặt: $P_i := P_i(0)$
thì có thể phát biểu các kết quả của bổ đề 1 và 2 như sau:

Định lý 1: Giả sử $\widehat{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ thỏa mãn các điều kiện (1, 2) và

3. $$\prod_{j=1}^{n} T_j = 0$$

$$\text{Khi đó } \sum_{j=1}^{n} P_j = I \; ; \; P_i P_j = \delta_{ij} P_i$$

2 Vấn đề chính qui hóa và tiêu chuẩn khả nghịch.

Trong mục này, giữ nguyên các ký hiệu như trong § 1, ta giả thiết $\widehat{T}$ thỏa mãn các điều kiện 1), 2) và 3) của định lý 1.

$$\text{Xét toán tử } A := A(w) = \sum_{j=0}^{m} A_j w^j \qquad (5$$

$$\text{trong đó } W = \sum_{j=1}^{n} w_j P_j \; ; \; w_j \in S(\widehat{T}) \; ; \; A_j \in L(X) \qquad (6$$

Bổ đề 3: Đặt $X_j = P_j X$; $j = 1,2,\ldots,n$ khi đó $X = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j$ và X_j bất biến đối với toán tử w dạng (6)

Chứng minh. được suy trực tiếp từ định lý 1 (công thức (4)). và tính giao hoán của W với các P_j.

Bổ đề 4: Mọi toán tử A dạng (5, 6) đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$A = \sum_{k=1}^{n} A(w_k)\, P_k \qquad (7$$

Chứng minh. Trước hết nhận xét rằng

$$W^k = \sum_{j=1}^{n} w_{jk} P_j \; ; \; k = 0, 1, \ldots$$

ễ dàng chứng minh bằng quy nạp toán học)

ừ đó suy ra :

$$A = \sum_{j=0}^{m} A_j \sum_{h=1}^{n} w^j_k P_k = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=0}^{m} A_j w^j_k) P_k \quad \text{đpcm}$$

Sử dụng biểu diễn (7) ta có thể phát biểu các tiêu chuẩn khả nghịch và điều iện chính quy hóa đối với toán tử A dạng (5, 6) như sau :

Định lý 2 : Giả sử $\widehat{T}$ thỏa mãn các điều kiện 1) – 3), J là iđêan hai phía trong (X) và $[T_i, A_j] \in I$; $\forall_{ij}$. Khi đó, nếu các $A(W_k)$ khả nghịch và

$$A(w_k) R_k = R_k A(w_k) = I$$

ì toán tử A cho chính quy hai phía R_A theo iđêan J và

$$R_A = \sum_{h=1}^{n} R_k P_k$$

Chứng minh Dễ dàng nhận được bằng tính toán trực tiếp.

Trường hợp riêng, khi iđêan J = 0 ta có :

Định lý 3 : Giả sử $\widehat{T}$ thỏa mãn các điều kiện (1, 3) và $[T_i, A_j] = 0$; $\forall_{ij}$ ức $A_j \in S(\widehat{T})$). Khi đó, điều kiện cần và đủ để toán tử A dạng (5, 6) khả ghịch là các toán tử $A(w_k)$ khả nghịch.

Chứng minh. Điều kiện đủ là hệ quả trực tiếp của định lý 2. Ta chứng minh iều kiện cần. Xét phương trình $A\varphi = f$ trong X. Theo bổ đề 3 thì phương trình ày tương đương với hệ :

$$A(w_j)\varphi_j = f_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$
$$\varphi_j, f_j \in X_j$$

ậy nếu $A(W_j)$ (j=fixed) không khả nghịch thì phương trình tương ứng $A(w_j)\varphi_j = f_j$ ẽ không luôn luôn giải được ứng với mọi $f_j \in X_j$, suy ra phương trình $A\varphi = f$ hông luôn luôn giải được $Af \in X$, điều này trái với giả thiết. Ta được điều hải chứng minh.

3. *Đặc trưng chiều*. Khi J là iđêan Fredholm hoặc iđêan tựa Fredholm và ại số đã cho là chính quy được theo một iđêan nào đó ([2]) thì hoàn toàn tương ự như trường hợp toán tử đại số (xem [2], t.84) ta dễ dàng chứng minh :

Định lý 4. Giả sử $\widehat{T}$ thỏa mãn các điều kiện $[T_i, T_j] = 0$ $T_i - T_j$ khả nghịch hi $i \neq j$; $\prod_{j=1}^{n} T_j = T_0 \in J$ trong đó J là iđêan hai phía tựa Fredholm trong đại ố $L_0(X) \subset L(X)$. Giả sử A toán tử dạng (5, 6) trong đó :

1. $A_j \in L_0(X)$; $[A_j, T_i] \in J$ $\forall_{ij}$
2. Tồn tại các chính quy đơn R_k của $A(W_k)$ theo J.

Khi đó toán tử A+T có đặc trưng chiều hữu hạn với mọi $T \in f$. Ngoài ra, ếu J là iđêan Fredholm và $L_0(X)$ là đại số chính quy được theo một iđêan $_1 \in L_0(X)$ nào đó thì

$$\text{Jnd}(A + T) = \text{Jnd}\, A < \infty \ , \ \forall T \in I$$

4. *Áp dụng trong phương trình*

Trước hết ta xét phương trình sinh bởi quá trình lặp [4] sau đây:

$$Q\varphi := \prod_{j=1}^{n} (T - T_j)\varphi = f \qquad (8$$

trong đó $\widehat{T}$ thỏa mãn các điều kiện 1) và 2) trong [4], $T \neq 0$)

Bổ đề 5: $\operatorname{Ker} Q = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j^{o} \quad ; \quad X_j^{o} = P_j (\operatorname{Ker} Q)$

Chứng minh được suy trực tiếp từ bổ đề 3.

Định lý 5. Phương trình (8) giải được khi và chỉ khi các phương trình

$$(T-T_j)\varphi_j \prod_{i\neq j} R_{ij} f \quad (j = 1,2,\ldots,n) \qquad (9)$$

giải được $\forall T \in S(\widehat{T}$. Nghiệm của (8) được tính theo công thức: $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j$

trong đó φ_j là nghiệm của (9)

Chứng minh. Giả sử (9) giải được và $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ là nghiệm của nó. Khi đó, theo bổ đề 1, ta có:

$$\prod_{j=1}^{n} (T-T_j) \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (T-T_j)\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} (T-T_j)(T-T_j)\varphi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} (T-T_j) R_{ji} f = \sum_{i=1}^{n} P_i(T) f = f. \text{ Vậy } \sum_{i=1}^{n} \text{ là nghiệm của (8).}$$

Ngược lại, nếu φ là nghiệm của (8) thì $\varphi_i = P_i(T)\varphi$ sẽ là nghiệm của (9). Thật vậy,

$(T-T_i)\varphi_i = (T-T_i) \prod_{j\neq i} (T-T_j) R_{ij}\varphi = \prod_{j\neq i} R_{ij} \prod_{j=1}^{n} (T-T_j)\varphi = \prod_{j\neq i} R_{ij} f$. điều phải chứng minh.

Nhận xét rằng, từ bổ đề 5, ta suy ra φ_i xác định duy nhất theo φ.

Tiếp theo, ta xét một lớp phương trình sinh bởi $\widehat{T}$ thỏa mãn các điều kiện 1—3. trong § 1.

Xét đa thức $Q(T) = \sum_{\alpha=0}^{m-1} A_\alpha T^\alpha$ (10)

trong đó α là đề chỉ số: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_j \geqslant 0$; α_j — nguyên và $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$; $T^\alpha = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_n^{\alpha_n}$ nhận xét rằng

Bổ đề 6: $T_i P_j = \delta_{ij} T_j P_j$ và $T_j P_j = T_j$ (11)

Thật vậy. $T_i P_j = \prod_{j=1}^{n} T_j \prod_{k\neq j} R_{kj} = 0$ khi $i \neq j$ và từ đẳng thức $\sum_{j=1}^{n} P_j = I$ ta suy ra $T_i P_i = T_i$

Định lý 6. Giả sử $A_\alpha \in S(\widehat{T})$, khi đó phương trình $Q(T)\varphi = f$ (trong đó $Q(T)$ có dạng (10)) (12) giải được khi và chỉ khi các phương trình

$$\sum_{k=0}^{m-1} A_{\underbrace{j\ldots j}_{k}} T_j^k \varphi_j = f_j \; ; \; f_j = P_j f \tag{13}$$

ải được trong X_j. Nghiệm của (12) được tính theo công thức $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j T_j$ trong ó φ_j là nghiệm của (13).

hứng minh được suy trực tiếp từ Bổ đề 6 (công thức (11))

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Przeworska — Rolewicz D. Equations with transformed argumment, An gebraic approach. Amsterdam—Warzawa 1973.
2. Przeworska — Polewicz D. and Rolewicz S. Equations in linear spaces. 'arszawa 1968
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи «Наука», М. 1977.
4. Wachnicki E. Dem. Math. Vol XVIII, $N_0$1, 1984.
5. Nguyen Van Mau. Dem. Math. Vol XVIII, $N_0$1, 15—57. 1984

гуен Ван Мау

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРОЖДЕННЫХ КОММУТАТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рассматривается один класс операторов порожденных набором комму-тивных операторов $[T_1, T_2, \ldots, T_n] = \widehat{T}$

$$A = \sum_{j=0}^{m} A_j w^j \; ; \; w = \sum_{j=1}^{n} w_j P_j$$

е $T_i - T_j$ обратимы $(i \neq j)$; P—проекторы порожденные T_j соответственно; $_j \in \varphi(\widehat{T})$—центр $\widehat{T}$ в $L(X)$.

Получены условия нетеровости, критерий обратимости и явный вид ре-гуляризаторов. Далее, дается некоторые приложения к соответствующим равнениям.

guyen Van Mau

ON A CLASS OF EQUATIONS WITH COMUTATIVE OPERATORS

Consider a class of operator equation generated by commutative operator $(T_1, \ldots, T_n)$ when $T_i - T_j$ invertible $(i \neq j)$.

$$A = \sum_{j=0}^{m} A_j w^j \; , \; W = \sum_{j=1}^{n} W_j P_j$$

here W_j belongs to the algebra center of $(T_1, \ldots, T_n)$ in $L(x)$. Some criteria for gular operators to be Noehter, inver tible and their explicit form are given. fter that, we show some application to solve corresponding equations.

Nhận bài ngày 20-4-1986