ÔPÔ MÊTRIC TRONG KHÔNG GIAN TẤT CẢ CÁC TẬP ON COMPẮC KHÔNG RỖNG CỦA KHÔNG GIAN MÊTRIC

LÊ VĂN TRỰC

Tiếp tục những kết quả của Michael [1], Nagy [2] v.v... chúng ta nghiên cứu ıi tiết một vài tính chất của tôpô mêtric trong không gian tất cả các tập con ɔmpac không rỗng của không gian mêtric. Định lý 1.5 là kết quả chính của ıi báo.

1.1 *Các ký hiệu:* Giả sử (X, τ) là không gian tôpô. $\overline{A}$ ký hiệu bao đóng của ıp A trong không gian X. A(X) ký hiệu tập hợp tất cả các tập con của không an X, P(X) ký hiệu tập hợp tất cả các tập con không rỗng của không gian X. (X), hoặc C(X) hoặc K(X), ký hiệu tập hợp tất cả các tập con mở không rỗng oặc đóng không rỗng, hoặc compác không rỗng của không gian X.

Ta hãy định nghĩa những ánh xạ:

$$u : A(X) \to A(P(X)) : \quad u(G) = [H ; N \in P(X), H \subset G]$$

$$l : A(X) \to A(P(X)) : \quad l(G) = [H ; H \in P(X), H \cap G \neq \phi]$$

à ký hiệu:

$$\underline{BU}(X) = [u(G) ; G \in \tau],$$

$$\underline{BL}(X) = [l(G) ; G \in \tau],$$

$$\underline{BS}(X) = \underline{BU}(X) \cup \underline{BL}(X)$$

Bây giờ ta có thể đưa ra những cấu trúc tôpô cơ sở trong tập P(X)

1.2. *Định nghĩa:* Giả sử (X,τ) là không gian tôpô. Giả sử $\underline{U}(X)$, $\underline{L}(X)$, $\underline{S}(X)$ là các tôpô trong tập P(X). Ta nói rằng $\underline{U}(X)$, hoặc $\underline{L}(X)$, hoặc $\underline{S}(X)$ là tôpô bán hữu hạn trên, hoặc tôpô bán hữu hạn dưới, hoặc ɔpô bán hữu hạn trong tập P(X) nếu U(X), hoặc L(X), hoặc S(X) là tôpô thô hất trong tập P(X) sao cho $\underline{BU}(X) \subset \underline{U}(X)$, hoặc $\underline{BL}(X) \subset \underline{L}(X)$, hoặc $\underline{BS}(X)$ $\subset$ $\underline{S}(X)$. Sau đây ta sẽ ký hiệu không gian tôpô P(X) với tôpô $\underline{U}(X)$, hoặc $\underline{L}$ (X), hoặc $\underline{S}(X)$ bởi UX, hoặc LX, hoặc SX.

Ta nhận thấy rằng hệ $\underline{BU}(X)$ lập thành cơ sở của tôpô $\underline{U}(X)$ trong khi đó $\underline{BL}(X)$ và $\underline{BS}(X)$ chỉ lập thành cơ sở con của tôpô $\underline{L}(X)$ và $\underline{S}(X)$. Dễ dàng chỉ ra ằng những đẳng thức:

$$u(E) = P(X) - l(X-E), \; l(E) = P(X) - u(X-E) \tag{1}$$

ược nghiệm đúng đối với mọi tập $E \in P(X)$.

Từ đây ta thấy rằng đối với mỗi tập con đóng E của không gian X, tập u(E) oặc l(E) là tập con đóng của không gian UX hoặc LX. Do đó ta có thể đặc trưng tôpô $\underline{U}(X)$ và $\underline{L}(X)$ nhờ những tập đóng như sau. Tôpô $\underline{U}(X)$, hoặc $\underline{L}($ là tôpô thô nhất trong tập $P(X)$ sao cho đối với mỗi tập đóng $H \in C(X)$, tậ $u(H)$ hoặc tập $l(H)$ là tập con đóng của không gian UX, hoặc LX.

Nếu như $G \in O(X)$, $G \neq X$, thì $X \notin u(G)$. Đương nhiên X không phải phần tử của tập con mở thực sự nào của không gian UX, do đó phải nằm tro tập con đóng không rỗng bất kỳ của không gian UX. Điều này nghĩa là hệ bấ kỳ những tập con đóng không rỗng của không gian UX có giao không rỗn Từ đây suy ra rằng UX là compắc.

Nếu như $G \in O(X)$, thì $X \in l(G)$. Bởi vì X nằm trong mỗi phần tử khôn rỗng của cơ sở con của tôpô $\underline{L}(X)$, nên là phần tử của tập mở không rỗng b kỳ trong LX. Từ đây và từ chú ý trước suy ra rằng tôpô $\underline{U}(X)$ và $\underline{L}(X)$ khôn so sánh được với nhau.

Tập con $\underline{E} \subset UX$ là lân cận của điểm $A \in UX$ nếu tồn tại tập mở $G \in O($ sao cho $A \in u(G) \subset \underline{E}$. Nếu như A, $B \in UX$, $B \subset A$, thì mỗi lân cận của điểm chứa phần tử B, do đó không gian UX không phải là không gian T_1 đối với m không gian X có ít nhất hai phần tử.

Tập con $\underline{E} \subset LX$ là lân cận của điểm $B \in LX$ nếu tồn tại một số hữu hạ những tập hợp mở $G_1, G_2, \ldots G_n \in O(X)$ sao cho $B \in \bigcap_{i=1}^{n} l(G_i) \subset \underline{E}$. Nếu như A $B \in LX$, $B \subset A$, thì mỗi lân cận của phần tử B chứa phần tử A, do đó khôn gian LX không phải là không gian T_1 đối với bất kỳ không gian X có ít nhấ hai phần tử.

1.3. **Không gian của những tập con đóng và compắc**

Sau đây ta sẽ chỉ quan tâm những không gian con $C(X)$ hoặc $K(X)$ đượ lập thành bởi tất cả các tập con đóng không rỗng, hoặc compắc không rỗng củ không gian X. Ta sẽ lại ký hiệu những hạn chế của tôpô $\underline{U}(X)$, $\underline{L}(X)$ và $\underline{S}(X)$ t không gian $P(X)$ lên những không gian con $C(X)$ và $K(X)$ bằng những ký hiệ giống như trước. Ký hiệu $UCX = (C(X), \underline{U}(X)$, $LCX = (C(X), \underline{L}(X))$, $SCX =$ $(C(X), \underline{S}(X))$ (2) và tương tự.

$UKX = (K(X), \underline{U}(X))$, $LKX = (K(X), \underline{L}(X))$, $SKX = (K(X), \underline{S}(X)$ (3). Ta s hiệu ánh xạ u, hoặc l như sau:

$$u;\ A(X) \to A(C(X));\quad u(G) = [H;\ H \in C(X),\ H \subset G],$$

hoặc:

$$l:\ A(X) \to A(C((X):\quad l(G) = [H;\ H \in C(X),\ H \cap G \neq \phi]$$

Tôpô đầu tiên của không gian tất cả các tập con đóng của không gian mêtri giới nội được nêu ra bởi Hausdorff. Bây giờ ta xét chi tiết một vài tính ch của tôpô mêtric tương ứng trong không gian tất cả các tập con compắc khôn rỗng của không gian mêtric.

1.4. **Mêtric Hausdorff**: Giả sử (Y, ρ) là không gian mêtric. Đối với mỗi tậ hợp $B \subset Y$ và mỗi số $\varepsilon > 0$ ta sẽ ký hiệu ε — lân cận của tập B trong khôn gian Y bởi tập hợp:

$$S(B, \varepsilon) = [y \in Y; \rho(y, B) < \varepsilon] \tag{4}$$

ếu như $A, B \in P(Y)$, thì ta gọi số

$$r(A, B) = \inf [\varepsilon \in R^{+};\ A \subset S(B, \varepsilon)] \tag{5}$$

à độ lệch từ tập hợp A đến tập hợp B (theo thứ tự này).

Đương nhiên :

$$r(A, B) = \sup [\rho(x, B),\ x \in A] \tag{6}$$

Số

$$d(A, B) = \max [r(A, B),\ r(B, A)] \tag{7}$$

gọi là khoảng cách Hausdorff giữa tập A và B. Ta đã biết rằng hệ thức (7) xác định trong tập hợp $C(Y)$ và do đó cả trong tập hợp $K(Y)$ một mêtric, mà nó được gọi là mêtric Hausdorff. Những không gian mêtric của tất cả các tập con đóng, compắc của không gian Y với mêtric Hausdorff d, mà nó được định nghĩa bởi hệ thức (7), được ký hiệu bởi:

$$HCY = (C(Y), d) \text{ hoặc } HKY = (K(Y), d)$$

Tập hợp tất cả các lân cận cầu mở của những điểm của không gian mêtric tạo thành cơ sở của tôpô mêtric tương ứng. Do đó ta hãy xét chi tiết cấu trúc ε— lân cận cầu của điểm tùy ý $B \in C(Y)$ trong không gian HCY.

Điểm $A \in C(Y)$ thuộc ε — lân cận cầu của điểm B trong không gian HCY nếu $d(A, B) = \max [r(A, B), r(B, A)] < \varepsilon$, tức là nếu thỏa mãn đồng thời $r(A, B) < \varepsilon$, $r(B, A) < \varepsilon$. Từ (5) suy ngay ra rằng điều kiện $r(A, B) < \varepsilon$ hoặc $r(B, A) < \varepsilon$ được thỏa mãn nếu $A \subset S(B, \varepsilon)$, hoặc $B \subset S(A, \varepsilon)$. Từ đây điều kiện $d(A, B) < \varepsilon$ được thỏa mãn nếu $A \subset S(B, \varepsilon)$ và đồng thời $B \subset C(A, \varepsilon)$.

Đối với mỗi điểm $B \in C(Y)$ và mỗi $\varepsilon > 0$ ta gọi $H(B, \varepsilon) = [A \in C(Y), A \subset S(B, \varepsilon)]$ (8)

hoặc $\quad h(B, \varepsilon) = [A \in C(Y);\ B \subset S(A, \varepsilon)]$ (9)

à ε lân cận Hausdorff trên, hoặc dưới của điểm B trong không gian $C(Y)$.

Tôpô $\underline{H}(Y)$, hoặc $\underline{h}(Y)$ trong không gian $C(Y)$, mà cơ sở của nó được tạo thành bởi hệ tất cả các ε — lân cận Hausdorff trên, hoặc dưới là tôpô Hausdorff trên, hoặc dưới trong không gian $C(Y)$.

Trực tiếp từ định nghĩa của tôpô $U(Y)$ và $\underline{H}(Y)$ suy ra rằng trong không gian mêtric giới nội Y bất kỳ các tôpô $\underline{U}(Y)$ và $\underline{H}(Y)$ phù hợp với nhau.

Định lý quan trọng sau cho quan hệ giữa hai tôpô $\underline{L}(Y)$ và $h(Y)$

1.5. **Định lý**: Giả sử Y là không gian mêtric giới nội compắc địa phương với mêtric ρ. Khi đó trong không gian tất cả các tập con compắc của không gian Y các tôpô $\underline{L}(Y)$ và $\underline{h}(Y)$ phù hợp với nhau.

Chứng minh: Đầu tiên ta hãy chỉ ra rằng $\underline{L}(Y) \subset \underline{h}(Y)$. Để chứng minh bao hàm thức này ta cần chỉ ra rằng đối với mỗi lân cận $h(B, \varepsilon)$ tồn tại những tập mở:

$$[U_1, U_2, \dots U_n] \tag{10}$$

sao cho nghiệm đúng $B \in \bigcup_{i=1}^{n} l(U_i) \subset \underline{h}(B, \varepsilon)$ (11)

Thật vậy ta sẽ chứng minh rằng dùng làm những tập (10) ta có thể chọn phủ hữu hạn bất kỳ của tập B bởi những $\varepsilon/2$ lân cận cầu mở. Giả sử rằng những tập hợp (10) được chọn như vậy và hãy lấy điểm bất kỳ.

$$A \in \bigcap_{i=1}^{n} l(U_i) \text{ tức là } A \cap U_i \neq \phi \text{ đối với } i = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

Bởi vì đường kính của những tập (10) là ε, từ (12) suy ra:

$$U_i \subset S(A, \varepsilon) \text{ đối với } i = 1, 2, \ldots, n$$

Do đó ta cũng có:

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \subset S(A, \varepsilon).$$

Theo (9) điều này nghĩa là $A \in h(B, \varepsilon)$. Bởi vì A được chọn tùy ý, ta có bao hàm thức (11) và do đó cả $\underline{L}(Y) \subset \underline{h}(Y)$.

Bây giờ ta hãy chỉ ra rằng $\underline{h}(Y) \subset \underline{L}(Y)$. Giả sử cho điểm tùy ý $B \in C(Y)$ và giả sử cho những tập mở (10) sao cho:

$B \in \bigcap_{i=1}^{n} l(U_i)$, tức là $B \cap U_i \neq \phi$ đối với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Đối với mỗi tập U_i ta hãy chọn tương ứng số ε_i như sau. Nếu $B \subset U_i$ ta sẽ chọn ε_i sao cho $S(B, \varepsilon_i) \subset U_i$. Dễ dàng chỉ ra rằng bao hàm thức:

$$h(B, \varepsilon_i) \subset L(U_i) \tag{13}$$

được nghiệm đúng. Bởi vì $B - U_i = K \neq \phi$, khi đó K là tập compắc và đối với mỗi điểm $x \in B \cap U_i \neq \phi$ thì $\rho(x, K) > 0$. Bây giờ ta đặt:

$$\varepsilon_i = \frac{r(B \cap U_i . K)}{2}$$

Đối với ε_i chọn như vậy hệ thức (12) lại nghiệm đúng. Nếu đặt

$$\varepsilon = \min [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n]$$

từ (13) ta nhận được:

$$h(B, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} l(U_i)$$

Từ đây suy ra bao hàm thức $\underline{h}(Y) \subset \underline{L}(Y)$. Định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Michael E. TAMS 71, 152–182, 1981.
2. Nagy J. Math, syst. Theory and Econ II. Springor, Berlin — Heidelberg — New York 355—378, 1969.
3. Lê văn Trực: Acta polytechnica. Praha 4 (III, (1)1979.
4. Lê văn Trực: Tạp chí khoa học Đại học Tổng hợp Hà nội số 2, 18–22. 1985.
5. Hausdorff F.: Mengenlehre. De gruyter, Berlin, 1927.

Ле Ван Чык

МЕТРИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВСЕХ НЕПУСТЫХ КОМПАКНЫХ МНОПСЕСТВ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В этой стате исследованы некоторые свойства метрической топологии в пространствах всех непустых компактный мнопсеств метрических пространств, которые исползованы в теори динамических систем без единственности.

Lê Văn Trực

METRIC TOPOLOGIES IN SPACES OF ALL NONEMPTY COMPACT SUBSETS OF METRIC SPACES

Summary: In this paper we look at detailly some properties of the metric topology in the space of all nonempty compact subsets of the metric space necessory to the study of dynamical sustems without uniqueness.

Nhận bài ngày: 20-4-1986