NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN DÙNG VI PHÂN LIE VÀ CÁC ĐỊNH LUẬT BẢO TOÀN TRONG ĐIỆN ĐỘNG LỰC HỌC CÁC MÔI TRƯỜNG LIÊN TỤC

NGUYỄN VĂN THỎA

Đạo hàm Lie và vi phân Lie đối với các tenxơ và các đối tượng hình học lần đầu tiên được đề cập đến trong các công trình của Slebodzinski (1930) và sau đó được áp dụng rộng rãi để nghiên cứu sự chuyển động của các không gian suy rộng và để lấy biến phân. Ngày nay đạo hàm Lie và vi phân Lie được sử dụng rộng rãi trong thuyết tương đối. Trong bài này vi phân Lie được tổng quát hóa trong trường hợp các phép biến đổi tọa độ có tham số tập thể và ứng dụng của chúng để rút ra các định luật bảo toàn tenxơ năng xung lượng và tenxơ mômen năng xung lượng trong điện động lực học chân không (hiệp biến L) và trong điện động lực học các môi trường liên tục (hiệp biến Y)

1. Vi phân Lie với các chỉ số và tham số tập thể.

Chúng ta định nghĩa vi phân Lie theo Schouten [1] như sau : Cho trong không gian X_n trường của một đối tượng hình học q^N phụ thuộc vào tọa độ. Tenxơ này có n chỉ số, được ký hiệu bằng chữ N cho gọn và gọi là *chỉ số tập thể*. Đối tượng này gọi là có đặc tính nếu ta biết công thức biến đổi các thành phần của nó khi thực hiện phép biến đổi tọa độ. Trong trường hợp riêng, đối với phép biến đổi dịch chuyển ta có

$$x^{k'} = P^{k'}_{n} x^{n} = x^{k} + v^{k} d\omega \tag{1}$$

trong đó v^k là một hàm vectơ nào đó, còn $d\omega$ là một tham số vô cùng bé. Phép biến đổi gọi là phép biến đổi có *tham số đơn thể*. Ta tổng quát hóa phép biến đổi (1) như sau :

$$x^{k'} = x^{k} + \xi^{k} = x^{k} + v^{k} d\omega + v^{k}_{n} d\omega^{n} + v^{k}_{mn} d\omega^{mn} + \dots \tag{2}$$

và gọi phép biến đổi đó là phép biến đổi tọa độ có *tham số tập thể*. Trong trường hợp riêng nếu

$$v^{k}_{n} = \delta^{k}_{n},\ v^{k}_{mn} = \delta^{k}_{m} x_{n} - \delta^{k}_{n} x_{m} \tag{3}$$

còn các hệ số khác trong biến đổi (2) đều bằng không, ta có :

$$x^{k'} = x^{k} + \xi^{k} = x^{k} + d\omega^{k} + x_{n} d\omega^{kn} \tag{4}$$

rõ ràng là tham số ở số hạng thứ ba vế phải phản xứng theo các chỉ số k, n Phép biến đổi (4) gọi là phép biến đổi chuyển động vô cùng nhỏ (phép biến đổi Lorentz không thuần nhất). Phép biến đổi này bao gồm biến đổi dịch chuyển $x^{k'} = x^{k} + d\omega^{k}$ và biến đổi quay $x^{k'} = x^{k} x_{n} d\omega^{kn}$.

Bây giờ chúng ta xét tại điềm $x^{k'}$ hai giá trị của q^N : 1) Giá trị tự nhiên của ó tại điềm $x^{k'}$ cũng được xác định giống như giá của nó tại điềm x^k ; 2) giá trị éo theo $\overline{q^N}$ tại điềm $x^{k'}$ nhận từ giá trị tự nhiên của nó tại x^k bằng phép biến lồi tọa độ (2). Khi đó vi phân Lie của đối tượng hình học đã cho tại điềm x^k bằng iệu giữa giá trị tự nhiên và giá trị kéo theo của nó tại điềm $k^{k'}$ khi tất cả các ham số trong (2) đều tiến đến không, tức là

$$\underset{L}{\delta} q^N = \lim_{\xi \to 0} [\, q^N (x^{k'}) - \overline{q^N} (x^{k'}) \,] \tag{5}$$

2. Các định luật bảo toàn trong điện động lực học chân không

Đề thu được các định luật bảo toàn chúng ta sử dụng nguyên lý biến phân lùng vi phân Lie, tức là trong nguyên lý biến phân này các toán tử biến phân lược thay bằng các vi phân Lie.

Trong điện động lực học chân không hoặc trong lý thuyết điện tử Lorentz làm tác dụng của trường điện từ có dạng

$$S = -\frac{1}{4c} \int F^{ik} F_{ik} \sqrt{-g}\; d^4x, \tag{6}$$

rong đó tenxơ F có các chỉ số trên là tenxơ cảm ứng điện từ, còn teuxơ F có các hỉ số dưới là tenxơ cường độ điện từ ; các tenxơ này được liên hệ với nhau bằng các tenxơ metric chân không, ở hệ SI chúng có dạng [2]:

$$g^{ik} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{7}$$

Biểu diễn ở trong (6) tenxơ cảm ứng điện từ qua tenxơ cường độ điện từ, sau łó chỉ lấy biến phân của S theo tenxơ metric là tenxơ đặc trưng cho các tính chất łối xứng của không gian. Cuối cùng ta thu được

$$\underset{L}{\delta} S = -\frac{1}{2c} \int T^{ik} \sqrt{-g}\, \underset{L}{\delta} g_{ik}\, d^4x \tag{8}$$

Trong đó

$$T^i_k = -F^{in} F_{kn} + \frac{1}{4} \delta^i_k F^{mn} F_{mn} \tag{9}$$

và được gọi là *tenxơ năng xung lượng của trường điện từ trong chân không* Dựa vào định nghĩa (5) và chú ý rằng ở đây tenxơ metric không đồi ta có

$$\underset{L}{\delta} g_{ik} = \partial_i \xi_k + \partial_k \xi_i \tag{10}$$

Kết hợp các công thức (4, 8, 10) và áp dụng định lý Gauss đối với một vùng rộng vô hạn, ở đó các tham số triệt tiêu, sau một số phép tính đơn giản ta thu được

$$\underset{L}{\delta} S = \frac{1}{c} \int [\, (\partial_i T^{ik})\, d\omega_k + (\partial_i M^{ikn})\, d\omega_{kn} - T^{kn}\, d\omega_{kn} \,] \sqrt{-g}\; d^4x \tag{11}$$

trong đó

$$M^{ikn} = T^{ik} x^n - T^{in} x^k \tag{12}$$

và được gọi là *tenxơ mômen năng xung lượng của trường điện từ trong chân không*. Vì các tham số trong (11) phản xứng theo các chỉ số k,n và tenxơ năng xung lượng (9) lại đối xứng cũng theo hai chỉ số đó nên số hạng thứ ba trong (11) bị triệt tiêu. Cho biến phân của S bằng không và chú ý rằng các hàm số trong (11) là hoàn toàn bất kỳ, ta được

$$\partial_i T^{ik} = 0, \quad \partial_i M^{ikn} = 0 \tag{13}$$

Như vậy từ một phương trình biến phân trong trường hợp biến đổi chuyển động vô cùng nhỏ ta thu được hai định luật bảo toàn, đó là định luật bảo toàn tenxơ năng xung lượng (9) và định luật bảo toàn tenxơ mômen năng xung lượng (12) của trường điện từ trong chân không. Ở đây có một điều cần chú ý là ở trong chân không không gian đồng nhất và đẳng hướng tenxơ năng xung lượng đối xứng nên cả hai định luật trên đồng thời được thỏa mãn.

3. Các định luật bảo toàn trong điện động lực học các môi trường liên tục

Trong các môi trường liên tục, đồng nhất, đẳng hướng, hàm tác dụng của trường điện từ thu được bằng cách tổng quát hóa (6) dưới dạng sau:

$$S = -\frac{1}{4c} \int D^{ik} E_{ik} \sqrt{-\varepsilon}\, d^4x \tag{14}$$

Trong đó các tenxơ D và E là các tenxơ cảm ứng và cường độ điện từ trong môi trường đã cho, chúng được liên hệ với nhau nhờ tenxơ điện từ thẩm Tamm, ở trong hệ SI tenxơ này có dạng [2].

$$\varepsilon^{in} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{dia}(\varepsilon\mu - 1, -1, -1) \tag{15}$$

Như vậy tenxơ Tamm (15) trong hàm tác dụng (14) đóng hai vai trò, thứ nhất nó là tenxơ điện từ thẩm của môi trường liên hệ giữa các tenxơ cảm ứng và cường độ điện từ, thứ hai, nó là tenxơ metric không thời gian trong môi trường liên hệ giữa các thành phần hiệp biến và phản biến của các tenxơ trường điện từ và qui định đơn vị đo các đại lượng điện từ trong môi trường đó. Như vậy hàm tác dụng (14) ứng với các phương trình trường điện từ trong môi trường đồng nhất, đẳng hướng, trong hệ quy chiếu quán tính điện từ của môi trường đó [3, 4, 5]

Bằng cách lập luận tương tự như trong mục 2 tức là chỉ lấy biến phân hàm tác dụng (14) theo các tenxơ Tamm (15) và áp dụng định lý Gauss ta thu được các hệ thức biểu diễn các định luật bảo toàn tenxơ năng xung lượng và tenxơ mômen năng xung lượng trong môi trường. Các hệ thức này hoàn toàn giống các hệ thức trong chân không (13) nhưng bây giờ các tenxơ này được biểu diễn không phải qua các tenxơ cường độ và cảm ứng điện từ trong chân không nữa mà qua các tenxơ cường độ và cảm ứng điện từ trong môi trường. Trong trường hợp riêng ta có:

$$T^i_k = -D^{in} E_{kn} + \frac{1}{4} \delta^i_k D^{mn} E_{mn} \tag{16}$$

Ta nhận thấy rằng tenxơ này đối xứng, thực vậy

$$T^{in} = \varepsilon^{nk} T^i_k = \left(\begin{array}{c|c} w & c\varepsilon\sqrt{\mu}\,\vec{\Pi} \\ \hline c\varepsilon\sqrt{\mu}\,\vec{\Pi} & T^{ab} \end{array} \right) \tag{17}$$

rong đó w là mật độ năng lượng trường điện từ, $\vec{\Pi}$ là vectơ Poynting còn T^{ab} là tenxơ sức căng Maxwell trong môi trường.

Khác với lý thuyết trường điện từ trong hệ quy chiếu quán tính điện từ lý thuyết hiệp biến Y) mà ta đã trình bày ở trên, lý thuyết hiệp biến L (lý thuyết rường điện từ trong các môi trường được xét trong hệ quy chiếu quán tính trong hân không—hệ Lorentz) tenxơ năng xung lượng Minkowski có dạng [2]

$$T^{in} = \left(\begin{array}{c|c} w & c\varepsilon\mu\vec{\Pi} \\ \hline \dfrac{\vec{\Pi}}{c} & T^{ab} \end{array} \right) \tag{18}$$

Tenxơ này không đối xứng. Tính chất không đối xứng của nó đã gây ra một cuộc ranh luận lâu dài (xem trong [2]). Cũng vì tenxơ Minkowski không đối xứng nên enxơ mômen năng xung lượng riêng của trường điện từ không được bảo toàn, muốn cho tenxơ này được bảo toàn cần phải bổ sung vào nó tenxơ mômen cơ học của chính môi trường. Ở trong hệ quy chiếu quán tính điện từ trong môi rường, tenxơ năng xung lượng (16) hoàn toàn đối xứng, đó là do trong hệ này rường điện từ và môi trường được xét thành một thể thống nhất, điều đó thể hiện ở chỗ tenxơ metric của không thời gian phụ thuộc vào chính môi trường. ính chất đối xứng của môi trường cũng là tính chất đối xứng của không gian và tenxơ mômen năng xung lượng được bảo toàn một cách tự động.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. A Schouten, Tensor analysis for physicists. Oxford 1951
2. Nguyễn văn Thỏa, Điện động lực học. T2, NXB ĐHTHCN, Hà nội 1982
3. Nguyễn văn Thỏa, V. I. Voronsov, A. E. Levashov, Gravitation and Relativity, N8, 126–132, K. 1971.
4. Nguyễn văn Thỏa, A. E. Levashov, Gravitation and Relativity, N8, 139 – 141, K. 1971.
5. Nguyễn văn Thỏa, Tạp chí khoa học ĐHTH, vật lý, N1, 19—22, 1986.

Нгуен Ван Тхоа

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП С ДИФЕРЕНЦИАЛОМ ЛИ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

В этой стетье дифференциал Ли обощен в случее коллективного закона преобразования. Вариационный принцип с дифференциалом Ли использован для вывода єаконов сохраения в Лоренце-ковариантной электродинамике вакуума и в У-ковариантной электродинамике материальных сред. Показано, что в У–ковариантной электродинамике тензор энергии-импульса симметричный и одним вариационным уравнением получены оба законов сохранения тензора энергии-импульса и тенрора момента энергии-импульса электромагнитного поля.

Nguyễn văn Thỏa

THE VARIATIONAL PRINCIPLE WITH A LIE DIFFERENTIAL AND THE CONSERVATION LAWS OF ELECTRODYNAMICS IN MEDIA

In the paper a Lie differential is generalized in the case of collective law of transformation. The variational principle with a Lie differential is used for receipt of the conservation laws in Lorentz-covariant electrodymamics in vacuum and Y-covariant electrodynamics in media, It show that the tensor of energy-impulse is symmetrical in Y-covariant electrodynamics in media and both of the conservation laws of the tensor of energyimpulse and tensor of moment of energy-impulse of electromagnetic field are received by one variational equation.

Nhận bài ngày 20-4-1986