TẠP CHÍ KHOA HỌC No 4 - 1994

MỘT VÀI KHÍA CẠNH MỞ RỘNG CHO LỚP CÁC PHỤ THUỘC BOOLE

Vũ Ngọc Loãn
Khoa Toán Cơ - Tin học, Đại học Tổng hợp Hà Nội

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong khoảng một thập kỷ qua, lớp các phụ thuộc Boole trong mô hình quan hệ đã thực sự được nhiều người quan tâm. Trong [7] đã giới thiệu về họ các phụ thuộc này và một số tính chất cơ bản của chúng. Tiếp theo [1, 2] đã phát triển các kết quả đối với lớp các phụ thuộc Boole. Các tác giả đã quan tâm đến một lớp con khá rộng của nó là lớp các phụ thuộc Boolean dương tổng quát (PTBDTQ). Đối với lớp này định lý tương đương về tính dẫn được trong lớp các quan hệ có số bộ tùy ý cũng như trong lớp các quan hệ chỉ bao gồm có hai bộ hay trong lôgic mệnh đề đã được phát biểu và chứng minh trong [5]. Ngoài ra một số vấn đề như bài toán thành viên, bài toán cập nhật, quan hệ Armstrong,... cũng đã được đề cập đến.

Bài viết này trình bày về một kiểu lôgic đa trị mà nó là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm lôgi hai trị thông thường và nêu một vài hướng có thể ứng dụng nó vào việc nghiên cứu các ràng buộc dữ liệu trong mô hình dữ liệu quan hệ. Dựa vào lôgic đa trị ta có thể đưa ra một số khái niệm và kết quả liên quan đến lớp các phụ thuộc Boole đa trị mà những điều đó là sự mở rộng thực sự của một số khái niệm và kết quả đã có.

Bài viết gồm 4 phần. Phần đầu giới thiệu chung. Phần hai nêu một số khái niệm và trình bày một số kết quả cơ bản liên quan đến lôgic đa trị. Đó là những điều cần thiết cho việc nghiên cứu một số bài toán đối với lớp phụ thuộc Boole đa trị. Phần ba, trình bày khái niệm về lớp các phụ thuộc Boole đa trị. Một lớp con quan trọng của nó là lớp các phụ thuộc Boole dương đa trị (PTBDĐT) sẽ được quan tâm nhiều khi nghiên cứu các bài toán thành viên, quan hệ Armstrong,... trong mô hình quan hệ. Trong phần bốn đề xuất một vài hướng nghiên cứu khi sử dụng lôgic đa trị cũng như các loại phụ thuộc Boole đa trị.

2. MỘT KIỂU LÔGIC ĐA TRỊ

Định nghĩa 2.1. Cho U là một tập hữu hạn khác trống gồm n phần tử và $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Nói rằng trên U xác định một lôgic đa trị nếu:

Với mỗi thuộc tính $A_i \in U$, $1 \le i \le n$ có tập B_i hữu hạn được gọi là miền đánh giá của biến lôgic A_i thỏa mãn các điều sau:

1. $B_i \subseteq [0, 1]$
2. Nếu $s \in B_i$ thì $1 - s \in B_i$
3. $1 \in B_i$

Đặt $K = U\, B_i$. Mỗi $s \in K$ được gọi là một hằng lôgic. Giả sử s_1, $s_2 \in K$, ta xác định các liên kết lôgic (các phép toán) $\vee$, $\wedge$, $\longrightarrow$, $\rceil$ trên K như sau:

$$s_1 \vee s_2 = \max\{s_1, s_2\}, \quad s_1 \wedge s_2 = \min\{s_1, s_2\}, \quad s_1 \longrightarrow s_2 = \max\{1 - s_1, s_2\}, \quad \rceil s_1 = 1 - s_1.$$

Các phép toán lôgic đó tương ứng được gọi là phép tuyển, hội, phủ định, kéo theo.

Ký hiệu $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$. Một ánh xạ $x : U \longrightarrow B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ sao cho $x(A_i) \in B_i$ $1 \leq i \leq n$ được gọi là một đánh giá trên U. Nếu $x(A_i) = x_i$ với $1 \leq i \leq n$ thì ký hiệu x bở $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$. Rõ ràng tập tất cả đánh giá trên U là hữu hạn.

Định nghĩa 2.2. Các phần tử của U được gọi là các biến lôgic. Mỗi hằng lôgic trong K mỗi biến lôgic trong U được gọi là một công thức.

Giả sử g, h là các công thức khi đó ta có thể tạo ra các công thức mới nhờ các liên kết lôgi $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$. Như vậy ta có $(g \wedge h)$, $(g \vee h)$, (g), $(g \longrightarrow h)$ là các công thức mới. Gọi F là tập tấ cả các công thức được tạo bởi tập U và các liên kết lôgic đã nêu ở trên. Mỗi $f \in F$ được gọi l một phụ thuộc Boole đa trị.

Cho $f \in F$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$, khi đó ta gọi $f(x)$ là giá trị chân lý của f đối với đán giá x và được xác định như sau:

Nếu f là một biến $A \in B_i$ thì $f(x) = x_i$. Khi f được tạo bởi các công thức g, h nhờ các liê kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ thì $f(x)$ được xác định một cách truy hồi như sau:

. Khi $f = (g \wedge h)$ thì $f(x) = (g \wedge h)(x) = g(x) \wedge h(x)$

. Khi $f = (g \vee h)$ thì $f(x) = (g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x)$

. Khi $f = (g \longrightarrow h)$ thì $f(x) = (g \longrightarrow h)(x) = g(x) \longrightarrow h(x)$

. Khi $f = \rceil(g)$ thì $f(x) = \rceil(g)(x) = \rceil(g(x))$

Nhận thấy rằng với $f \in F$, $\forall x \in B$ thì $f(x) \in K$.

Để cho ngắn gọn, trong một số phần sau thay cho $(g \wedge h)$, $(g \vee h)$ $(\rceil g)$, $(g \longrightarrow h)$ ta viết $g \wedge h$ $g \vee h$, $\rceil g$, $g \longrightarrow h$ một cách tương ứng.

Định nghĩa 2.3. Cho T là một tập nào đó các đánh giá trên U và g, h là hai công thức trê U. Ta nói rằng g và h là tương đương trên T, ký hiệu là:

$$g \stackrel{T}{=} h$$

nếu và chỉ nếu $x \in T$ có $g(x) = h(x)$. Dễ thấy rằng quan hệ trên là quan hệ tương đương. Kl $T = B$ thì nói rằng g tương đương với h và ký hiệu bởi $g = h$.

Giả sử g, h, $k \in F$, $x \in B$, khi đó dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn các bổ đề 2.1, 2.2 sa đây:

Bổ đề 2.1.

1. $g \wedge h = h \wedge g$
2. $(g \wedge h) \wedge k = g \wedge (h \wedge k)$
3. $g \vee h = h \vee g$
4. $(g \vee h) \vee k = g \vee (h \vee k)$

Bổ đề 2.2. Với $g \in F$ ta có

1. $\rceil(\rceil g) = g$
2. $g \longrightarrow h = \rceil g \vee h$

Bổ đề 2.3. Với giả thiết như các bổ đề trên, những khẳng định sau là đúng:

1. $(g \wedge h) \vee k = (g \vee k) \wedge (h \vee k)$

2. $\rceil(g \wedge h) = (\rceil g) \vee (\rceil h)$

3. $(g \wedge h) \longrightarrow k = g \longrightarrow (h \longrightarrow k) = h \longrightarrow (g \longrightarrow k)$

4. $k \longrightarrow (g \wedge h) = (k \longrightarrow g) \wedge (k \longrightarrow h)$

5. $(g \vee h) \wedge k = (g \wedge k) \vee (h \wedge k)$

6. $\rceil(g \vee h) = (\rceil g) \wedge (\rceil h)$

7. $(g \vee h) \longrightarrow k = (g \longrightarrow k) \wedge (h \longrightarrow k)$

8. $k \longrightarrow (g \vee h) = (k \longrightarrow g) \vee h = (k \longrightarrow h) \vee g$

9. $\rceil g \longrightarrow h = \rceil h \longrightarrow g = g \vee h$.

Chứng minh. Giả sử x bất kỳ và $x \in B$. Đối với các tính chất từ 1. đến 8., các công thức có g và h vai trò như nhau nên ta có thể giả thiết $g(x) \leq h(x)$ để không phải xét nhiều trường hợp. Khi tìm giá trị của các công thức theo x, ký hiệu vế trái là VT, vế phải là VP. Trong mọi trường hợp ta cần chỉ ra VT = VP là đủ:

1. Do $g(x) \leq h(x)$ vậy VT $= \max\{g(x), k(x)\}$. Do $g(x) \leq h(x)$ khi và chỉ khi $(g \vee k)(x) \leq (h \vee k)(x)$, suy ra VP $= \max\{g(x), k(x)\}$. Vậy VT = VP.

2. VT $= \rceil(g(x)) = 1 - g(x)$, VP $= \max\{1 - g(x), 1 - h(x)\} = 1 - g(x) =$ VT.

3. Trước hết chứng minh rằng $(g \wedge h) \longrightarrow k = g \longrightarrow (h \longrightarrow k)$

VT $= \max\left(\rceil(g(x)), k(x)\right) = \max\{1 - g(x), k(x)\}$, VP $= \max\{1 - g(x), \max\{1 - h(x), k(x)\}\}$ $= \max\{1 - g(x), 1 - h(x), k(x)\} = \max\{1 - g(x), k(x)\} =$ VT.

Đẳng thức $(g \wedge h) \longrightarrow k = h \longrightarrow (g \longrightarrow k)$ được chứng minh tương tự.

4. VT $= \max\{1 - k(x), g(x)\}$, VP $= \min\{\max\{1 - k(x), g(x)\}, \max\{1 - k(x), h(x)\}\} = \max\{1 - k(x), g(x)\} =$ VT.

5. VT $= \min\{h(x), k(x)\}$, VP $= \max\{\min\{g(x), k(x)\}, \min\{h(x), k(x)\}\} = \min\{h(x), k(x)\} =$ VT.

6. VT $= \rceil(h(x)) = 1 - h(x)$, VP $= \min\{1 - g(x), 1 - h(x)\} = 1 - h(x) =$ VT.

7. VT $= \rceil(h(x)) \vee k(x) = \max\{1 - h(x), k(x)\}$, VP $= \min\{\max\{1 - g(x), k(x)\}, \max\{1 - h(x), k(x)\}\} = \max\{1 - h(x), k(x)\} =$ VT.

8. Trước hết chỉ ra $k \longrightarrow (g \vee h) = (k \longrightarrow g) \vee h$. Thật vậy, VT $= \rceil(k(x)) \vee h(x) = \max\{1 - k(x), h(x)\}$, VP $= \max\{\max\{1 - k(x), g(x)\}, h(x)\} = \max\{1 - k(x), g(x), h(x)\} = \max\{1 - k(x), h(x)\} =$ VT . Tương tự ta cũng có $k \longrightarrow (g \vee h) = (k \longrightarrow h) \vee g$.

9. VT $= \max\{1 - (1 - g(x)), h(x)\} = \max\{g(x), h(x)\} =$ VP.

Từ bổ đề 2.1 suy ra rằng nếu một công thức chỉ chứa các phép hội hoặc chỉ chứa các phép tuyển thì ta có thể thay đổi một cách tùy ý vị trí của các hạng thức cũng như thứ tự thực hiện chúng. Đối với các công thức như thế ta quy ước là có thể bỏ các dấu ngoặc cho gọn. Trong một công thức thứ tự ưu tiên của các phép toán cũng được thừa nhận như đối với lôgic hai trị thông thường.

Hệ quả 2.1. Nếu $M_1, M_2, \ldots, M_k$ là các công thức và $P = M_1 \vee M_2 \vee \cdots \vee M_k$, $Q = M_1 \wedge M_2 \wedge \cdots \wedge M_k$. Khi đó với mọi $x \in B$ ta có $P(x) = \max\{M_1(x), M_2(x), \ldots, M_k(x)\}$, $Q(x) = \min\{M_1(x), M_2(x), \ldots, M_k(x)\}$.

Các đẳng thức sau là có lợi cho việc đơn giản hóa các công thức.

Bổ đề 2.4. Với mọi g, $h \in F$ ta có

1. $g \vee g \wedge h = g$
2. $g \wedge (g \vee h) = g$
3. $g \vee (\rceil g) \wedge h = g \vee h$
4. $\rceil g \vee g \wedge h = \rceil g \vee h$

Chứng minh. Tính chất 1., 2. là rõ ràng. Tính chất 3., 4. cũng nhận được do bổ đề 2.3.

Định nghĩa 2.4. Một hội sơ cấp là một công thức được tạo bởi các biến sơ cấp, các phủ định của các biến sơ cấp và liên kết lôgic $\wedge$.

Định nghĩa 2.5. Một tuyển sơ cấp là một công thức được tạo bởi các biến sơ cấp, các phủ định của các biến sơ cấp và liên kết lôgic $\vee$.

Định nghĩa 2.6. Một công thức lôgic được gọi chuẩn tắc tuyển nếu nó có dạng sau: $H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_k$, trong đó mỗi H_i, $1 \leq i \leq n$ là một hội sơ cấp.

Định nghĩa 2.7. Một công thức lôgic được gọi là chuẩn tắc hội nếu nó có dạng sau: $T_1 \wedge T2 \wedge \cdots \wedge T_k$, trong đó mỗi T_i $1 \leq i \leq n$ là một tuyển sơ cấp.

Lưu ý rằng mỗi hội sơ cấp là một dạng chuẩn tắc tuyển và mỗi tuyển sơ cấp là một dạng chuẩn tắc hội. Một công thức lôgic được gọi là có dạng chuẩn tắc hoặc ngắn gọn là chuẩn tắc nếu nó là một chuẩn tắc hội hoặc là một chuẩn tắc tuyển. Dễ dàng thấy khẳng định sau là đúng.

Bổ đề 2.5.

a. Phủ định một hội sơ cấp là một tuyển sơ cấp.

b. Phủ định một tuyển sơ cấp là một hội sơ cấp.

Bổ đề 2.6.

a. Tuyển của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển.

b. Hội của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội.

c. Hội của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển.

d. Phủ định một chuẩn tắc tuyển là một chuẩn tắc hội và ngược lại, phủ định một chuẩn tắc hội là một chuẩn tắc tuyển.

Chứng minh.

a. Giả sử hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển là T_1, T_2 với $T_1 = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p$, $T_2 = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q$. Trong đó $H_1, H_2, \ldots, H_p$, $K_1, K_2, \ldots, K_q$ là các chuẩn tắc hội. Đặt $T = T_1 \vee T_2 = (H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p) \vee (K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q)$ (1). Theo bổ đề 2.1. ta thấy rằng $T = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p \vee K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_p$ là một chuẩn tắc tuyển.

b. Cũng tương tự như phần a.

c. Giả sử hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển là T_1, T_2 với $T_1 = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p$, $T_2 = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q$. Với $x \in B$, đặt $a = \max\{H_1(x), H_2(x), \ldots, H_p(x)\}$, $b = \max\{K_1(x), K_2(x), \ldots, K_q(x)\}$. Giả sử $a = H_i(x)$, $b = K_j(x)$. Đặt $T = T_1 \wedge T_2 = (H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p) \wedge (K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q)$ (1). Ta có $T(x) = \min\{a, b\}$. Đặt $P = H_1 \wedge$

$K_1 \vee H_1 \wedge K_2 \vee \cdots \vee H_1 \wedge K_q \vee H_2 \wedge K_1 \vee \cdots \vee H_2 \wedge K_q \vee \cdots \vee H_p \wedge K_1 \vee H_p \wedge K_2 \vee \cdots \vee H_p \wedge K_p$. Rõ ràng P là một chuẩn tắc tuyển. Cũng dễ thấy $P(x) \leq a$ và $P(x) \leq b$, vậy $P(x) \leq \min\{a, b\}$.

Mặt khác theo hệ quả có $P(x) \geq (H_i \wedge K_j)(x) = \min\{a, b\}$. Từ đó $P(x) = \min\{a, b\}$. Vậy với mọi $x \in B$ thì $T(x) = P(x)$. Do đó $T = P$, tức là hội của hai chuẩn tắc tuyển có thể biểu diễn ở dạng chuẩn tắc tuyển.

d. Giả sử T là chuẩn tắc tuyển, $T = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p$ trong đó H_i $1 \leq i \leq p$ là các hội sơ cấp. Đặt $H = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_p$ với $T_i = \rceil H_i$. Do bổ đề 2.5. suy ra với $1 \leq i \leq p$ thì T_i là tuyển sơ cấp. Và H là một chuẩn hội.

Giả sử bất kỳ $x \in B$, ta đặt $T(x) = a$. Khi đó $(\rceil T)(x) = 1 - a$ và với $1 \leq i \leq p$, $H_i(x) \leq a$ và tồn tại H_j sao cho $H_j(x) = a$. Ta có $T_j(x) = 1 - a$, i, $1 \leq i \leq p$, $T_j(x) \leq T_i(x)$. do đó $H(x) = T_j(x) = 1 - a$. Suy ra $\rceil T = H$, tức là phủ định của một chuẩn tắc tuyển là một chuẩn tắc hội. Phần còn lại, tương tự.

Bổ đề 2.7. Cho H là một chuẩn tắc hội, khi đó sẽ tồn tại một công thức lôgic T ở dạng chuẩn tắc tuyển sao cho $H = T$.

Chứng minh. Giả sử H là một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội và có dạng $H = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_k$, trong đó mỗi T_i, $1 \leq i \leq n$ là một tuyển sơ cấp. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một chuẩn tắc tuyển T, sao cho $H = T$. Chứng minh quy nạp theo k.

Với $k = 1$, hiển nhiên khẳng định là đúng.

Giả sử bổ đề trên đã đúng cho mọi $k < p$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với $k = p$. Thật vậy, đặt $H_1 = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_{k-1}$. Theo giả thiết quy nạp tồn tại một công thức lôgic S ở dạng chuẩn tắc tuyển sao cho $H_1 = S$. Vậy $H = S \wedge T_k$, tức là H là hội của hai chuẩn tắc tuyển. Theo bổ đề 2.6. suy ra có một chuẩn tắc tuyển T sao cho $H = T$. Đó là điều cần chứng minh. Từ bổ đề này ta có ngay hệ quả sau:

Hệ quả 2.2. Mỗi công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc thì luôn luôn có thể biểu diễn được trong dạng chuẩn tắc tuyển.

Bổ đề 2.8. Giả sử C_1, C_2 là hai chuẩn tắc khi đó sẽ tồn tại các công thức M, N, P, Q cũng ở dạng chuẩn tắc sao cho $M = C_1 \vee C_2$, $N = C_1 \wedge C_2$, $P = \rceil C_1$, $Q = C_1 \longrightarrow C_2$.

Chứng minh. Áp dụng hệ quả 2.2, các bổ đề 2.2, 2.5 và 2.6. ta suy ra điều cần chứng minh.

Định lý 2.1. Mọi công thức lôgic luôn luôn có thể biểu diễn được trong dạng chuẩn tắc.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số các liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ có mặt trong công thức C.

Khi số liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ trong C xuất hiện không quá một thì dễ thấy rằng khẳng định là đúng.

Giả sử rằng trong mọi công thức C mà số k các liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ xuất hiện trong nó không quá p thì khẳng định đúng. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $k = p + 1$. Theo cách xây dựng công thức C sẽ tồn tại hai công thức C_1, C_2 sao cho $C = C_1 \wedge C_2$ hoặc $C = C_1 \vee C_2$ hoặc $C = \rceil C_1$ hoặc $C = C_1 \longrightarrow C_2$. Vì C có $p + 1$ các liên kết suy ra các công thức C_1 và C_2 đều có không quá p các liên kết lôgic. Theo giả thiết quy nạp sẽ tồn tại hai công thức D_1, D_2 trong dạng chuẩn tắc là $C_1 = D_1$, $C_2 = D_2$. Theo bổ đề 2.8, suy ra tồn tại các công thức M, N, P, Q ở dạng chuẩn tắc sao cho $M = D_1 \wedge D_2$, $N = D_1 \vee D_2$, $P = \rceil D_1$, $Q = D_1 \longrightarrow D_2$, Do $C = M$ hoặc $C = N$ hoặc $C = P$ hoặc $C = Q$ suy ra định lý được chứng minh.

3. PHỤ THUỘC BOOLE ĐA TRỊ

Giả sử $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là tập các thuộc tính. Với mỗi A_i $1 \le i \le n$ có một tập d_i nào đó gồm ít nhất hai phần tử được gọi là miền trị của thuộc tính A_i. Với $A \in U$, miền trị của A còn được ký hiệu bởi dom(A). Giả sử trên U đã xác định một lôgic đa trị và các miền đánh giá của A_i được ký hiệu B_i thỏa các yêu cầu như trong định nghĩa 2.1.

Một tập con R của tích $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$ được gọi là một quan hệ trên U. Mỗi $t \in R$ được gọi là một bộ. Quan hệ R với tập thuộc tính U được ký hiệu là $R(U)$. Giả sử $t \in R$, $A \in U$ khi đó ký hiệu $t.A$ là giá trị của t đối với thuộc tính A.

Định nghĩa 3.1. Với mỗi tập d_i, $1 \le i \le n$, ta xét ánh xạ $\alpha_i : d_i \times d_i \longrightarrow B_i$ thỏa mãn các điều sau:

1. $(a \in d_i)(\alpha_i(a, a) = 1)$,
2. $(a, b \in d_i)(\alpha_i(a, b) = \alpha_i(b, a))$,
3. $(s \in B_i$, có $a, b \in d_i)(\alpha_i(a, b) = s)$.

Ví dụ 3.1. Giả sử $B_i = \{0, 1\}$, d_i là một tập mà trên đó có quan hệ so sánh $=$ (bằng). Khi đó với $a, b \in d_i$, ta xác định

$$\begin{aligned} \alpha_i(a,b) &= 1 \quad \text{nếu} \quad a = b \\ &= 0 \quad \text{nếu} \quad a \neq b. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2. Giả sử $B_i = \{0, 1\}$, d_i là tập các từ trên một bảng chữ khác trống, ta định nghĩa: $a, b \in d_i$

$$\begin{aligned} \alpha_i(a,b) &= 1 \quad \text{nếu} \quad a, b \text{ là hai từ có cùng độ dài} \\ &= 0 \quad \text{ngược lại} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.3. Giả sử $Bi = \{0, 0.25, 0.75, 1\}$, d_i là tập các từ trên một bảng chữ khác trống. Với $a, b \in d_i$ ta xác định:

$\alpha_i(a,b) = 1$	nếu a, b là hai từ như nhau.
$\alpha_i(a,b) = 0,75$	nếu a, b khác nhau nhưng có cùng ký tự đầu tiên và có cùng độ dài.
$\alpha_i(a,b) = 0,25$	nếu a, b có cùng ký tự đầu tiên nhưng khác độ dài hoặc là chúng khác nhau nhưng có cùng độ dài.
$\alpha_i(a,b) = 0$	trong các trường hợp khác.

Dễ thấy các α_i trong ba ví dụ trên thỏa mãn các yêu cầu của định nghĩa.

Với tập F các công thức trên U, ta xét các định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.2. Xét $m \in [0,1]$, $f \in F$, $\Sigma \subseteq F$, đặt $T_f^m = \{x \in B \mid f(x) \ge m\}$ và $T_\Sigma^m = \{x \in B \mid \forall f \in \Sigma, f(x) \ge m\}$. Nhận thấy $T_\Sigma^m = \cap\{T_f^m \mid f \in \Sigma\}$.

Định nghĩa 3.3. Giả sử f và g là hai công thức và $m \in [0,1]$. Ta nói rằng g là m-suy dẫn f hay f là m-suy dẫn được từ g và ký hiệu là $g|\!\underline{\ m\ }\, f$ khi và chỉ khi với mọi $x \in B$ thỏa $g(x) \ge m$, ta có $f(x) \ge m$. Hai công thức f và g được gọi là m-tương đương nếu $f|\!\underline{\ m\ }\, g$ và $g|\!\underline{\ m\ }\, f$

Với $\Sigma \subseteq F$, $f \in F$ nói rằng Σ là m-suy dẫn f hay f là m-suy dẫn được từ tập Σ, ký hiệu là $\Sigma|\frac{m}{}f$ nếu $\forall g \in \Sigma$ ta có $g|\frac{m}{}f$. Giả sử Σ, $\Gamma \subseteq F$, ta nói rằng Γ là m-dẫn được từ Σ, ký hiệu là $\Sigma|\frac{m}{}\Gamma$ nếu $\Sigma|\frac{m}{}f$ với $\forall f \in \Gamma$.

Một công thức $f \in F$ được gọi là một phụ thuộc Boole dương đa trị nếu $f(e) = 1$ với $e = (1, 1, ..., 1)$. Ký hiệu F_p là tập tất cả các công thức dương trên U. Giả sử có $R(U)$ và u, $v \in R$, khi đó đánh giá $(\alpha_1(u.A_1 + v.A_2), \ldots, (\alpha_n(u.A_n, v.A_n))$ được ký hiệu bởi $\alpha(u,v)$ và đặt $T_R = \{\alpha(u,v)\ u, v \in R\}$. Nhận thấy rằng $R(U)$ có $e \in T_R$.

Định nghĩa 3.4. Mỗi công thức trong tập F_p được gọi là một phụ thuộc Boole dương đa trị được viết tắt là PTBDĐT. Giả sử R là một quan hệ trên U và $f \in F_p$. Nói rằng R m-thỏa PTBDĐTf, ký hiệu là $R^m(f)$ nếu $T_R \subseteq T_f^m$. Với $\Sigma \subseteq F_p$, khi đó R được gọi là m-thỏa tập PTBDĐT Σ, ký hiệu là $R^m(\Sigma)$ nếu với mọi $f \in \Sigma$ có $R^m(f)$. Điều đó tương đương với $T_R \subseteq T_\Sigma^m$.

Định nghĩa 3.5. Với $\Sigma \subseteq F$, $f \in F$, nói rằng Σ là m-suy dẫn f theo quan hệ hay f là m-suy dẫn được theo quan hệ từ tập Σ, ký hiệu là $\Sigma|\underline{\underline{m}}f$ nếu $\forall R(u)$ mà $R^m(\Sigma)$ thì cũng có $R^m(f)$.

Định nghĩa 3.6. Giả sử $\Sigma \subseteq F_p$, $f \in F_p$ và R là một quan hệ trên U. Ký hiệu Σ_m^+ là tập $\{f|\Sigma|\underline{\underline{m}}f\}$ và $LD^m(R)$ là tập tất cả các PTBDĐT trên U sao cho với mọi $f \in LD^m(R)$ thì $R^m(f)$. R gọi là quan hệ Armstrong mức m đối với tập Σ nếu $LD^m(R) = \Sigma_m^+$.

4. ĐỀ XUẤT

Việc sử dụng lôgic đa trị sẽ giúp ta nghiên cứu một số vấn đề mà nó là sự mở rộng thực sự và tự nhiên của nhiều kết quả đã đạt được đối với lớp các phụ thuộc Boole mà xuất phát điểm của nó là dựa vào lôgic hai trị:

Đó là một số điều kiện cần và đủ cho các suy dẫn $\Sigma|\frac{m}{}f$ và $\Sigma|\underline{\underline{m}}f$. Mối quan hệ của các suy dẫn đó,... Đặc biệt việc sử dụng các công thức trong dạng chuẩn tắc sẽ là có lợi khi nghiên cứu một số suy dẫn có dạng đặc biệt.

Cũng trong [5] các tác giả đưa ra điều kiện cần và đủ để một quan hệ là quan hệ Armstrong đối với tập Σ các PTBDTQ và đã nêu ra hai vấn đề: Hãy xây dựng quan hệ Armstrong cho tập Σ các PTBDTQ và hãy cho một đánh giá về số bộ của quan hệ Armstrong tối thiểu. Đối với lớp các PTBDĐT ta thể nói gì về điều kiện cần và đủ để R là quan hện Armstrong mức m đối với tập $\Sigma \subseteq F$? Với một tập bất kỳ $\Sigma \subseteq F_p$, $m \in [0,1]$, liệu có thuật toán xây dựng quan hệ Armstrong mức m cho tập Σ hay không ? Rõ ràng đó là những vấn đề có ý nghĩa đáng được quan tâm đối với các PTBDĐT. Trong khuôn khổ của một bài báo, không thể trình bày chi tiết nhiều ứng dụng của lôgic đa trị vào việc nghiên cứu các loại phụ thuộc dữ liệu. Trong bài sau chúng tôi sẽ trình bày một số các kết quả liên quan đến các vấn đề đã nêu. Định lý sau phát biểu về điều kiện cần và đủ cho sự suy dẫn của một số lớp các công thức có dạng đặc biệt chỉ xem như là một trong những ví dụ minh họa cho những ứng dụng ban đầu của lôgic đa trị. Sự chứng minh không khó khăn.

Định lý 4.1. Giả sử Σ là tập nào đó có các PTBDĐT trên U, và $X, Y, Z \subseteq U$. Khi đó:

1. $\Sigma|\frac{m}{} \wedge X \longrightarrow \wedge Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\text{có } A \in X)(x(A) \leq 1 - m)) \vee ((\forall B \in Y)(x(B) \geq m)))$.
2. $\Sigma|\frac{m}{} \wedge X \longrightarrow \vee Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\text{có } A \in X)(x(A) \leq 1 - m)) \vee ((\text{có } B \in Y)(x(B) \geq m)))$.
3. $\Sigma|\frac{m}{} \vee X \longrightarrow \wedge Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\forall A \in X)(x(A) \leq 1 - m) \vee ((\forall B \in Y)(x(B) \geq m)))$.
4. $\Sigma|\frac{m}{} \vee X \longrightarrow \vee Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\forall A \in X)(x(A) \leq 1 - m)) \vee ((\text{có } B \in Y)(x(B) \geq m)))$.

ở đây nếu $X = \{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}\}$ thì tương ứng ký hiệu $\wedge X = A_{i1} \wedge A_{i2} \wedge \cdots \wedge A_{ik}$, $\vee X = A_{i1} \vee A_{i2} \vee \cdots \vee A_{ik}$.

Liệu chăng các kết luận trên vẫn đúng khi thay ký hiệu suy dẫn $|\overset{m}{-}$ bởi $|\underline{\overset{m}{\ }}$? Rõ ràng điều đó được khẳng định khi định lý tương đương về tính dẫn được của hai kiểu suy diễn trên đối với lớp các PTBDĐT là đúng đắn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Berman J. and Blok W. J.** Generalized Boolean dependencies. Abstracts of AMS, 6 (1985), 163.
2. **Berman J. and Blok W. J.** Generalized Boolean dependencies. Inf. Processing Letters, 27 (1988), 147-150.
3. **Czedli.** On dependencies in the relational model of data. J. EKI 17 (1981). 103-112.
4. **Kowalski R. A.** Logic for Data Description. Logic and Data Bases (Gallaire H., Minker J. Eds.) Plenum Press, New York, 1978.
5. **Nguyen Xuan Huy and Le Thi Thanh.** Generalized Positive Boolean Dependencies. J. Inform. Process. Cybernet. EIK 28 (1992) 6, 363 - 370.
6. **Novikop P. X.** Đại cương lôgic toán. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà Nội - 1971. (Dịch từ nguyên bản Tiếng Nga. Người dịch Nguyễn Hữu Ngự - Đặng Huy Ruận).
7. **Sagiv Y., Delobel C., Parker D. S., and Fagin R.** An Equivevalence Between Relational Database Dependencies and a Fragment of Propositional Logic. J. ACM, 28, 3 (1981), 435-453. Also a correction to this paper in J. ACM, 34, 4 (1987), 1016 - 1018.

A WAY FOR EXTENDING BOOLEAN DEPENDENCIES IN THE RELATIONAL MODEL OF DATA

Vu Ngoc Loan
Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics
Hanoi University

In the paper, a type of multivalued logic and some of its properties are presented. On the basic of this logic, a class of multivalued Boolean dependencies is introduced. This is a generalization of some kinds of dependencies such as the equational dependencies, the positive Boolean dependencies and the classes of dependencies considered in [3]. The main purpose of the paper is to propose a way to generalize some results which have been obtained from the positive Boolean dependencies. Some aspects of studying multivalued Boolean dependencies are also mentioned in the paper. Using this multivalued logic, we shall consider the equivalence theorem of consequences in the world of all relations, the world of 2-tuple relations. On the basic of this theorem we shall have good tools to research membership problem, Armstrong relation as well as some other problems in the class of multivalued Boolean dependencies.