TẠP CHÍ KHOA HỌC No 4 - 1994

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN TỔNG QUÁT ĐỐI VỚI ĐA THỨC CỦA CÁC TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI

Phạm Quang Hưng
Khoa Toán Cơ - Tin học, Đại học Tổng hợp Hà Nội

Tính chất $c(R)$ của các toán tử ban đầu sinh bởi một toán tử khả nghịch phải đã được D. Przeworska - Rolewicz đưa ra và áp dụng giải các bài toán giá trị biên trong [1], [2], [3], [4].

W. Z. Karwowski và D. Przeworska - Rolewicz đã áp dụng giải các bài toán giá trị biên tổng quát trong [9].

Trong bài báo này chúng tôi đưa ra khái niệm tính chất $c(R)$ - suy rộng và áp dụng giải bài toán giá trị biên tổng quát:

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k D^k x = y, \qquad F_j D^k x = x_{jk},$$

trong đó F_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ là các toán tử ban đầu có tính chất $c(R)$ - suy rộng, $x_{jk} \in \ker D$ $(k \in I_j,\ j = 0, 1, \ldots, n)$.

1.

Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường $\mathcal{F}$ (ở đây $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathbf{C}$. $L(X)$ là tập tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong không gian tuyến tính X. Ký hiệu:

$$L_0(X) = \{A \in L(X) \ : \ \mathrm{dom}\ A = X\}.$$

Một toán tử $D \in L(X)$ được gọi là khả nghịch phải nếu $\exists R \in L(X)$, sao cho $\mathrm{Im}\ R \subset \mathrm{dom} D$ và $DR = I$ trên $\mathrm{dom}\, R$.

Nếu toán tử D là khả nghịch phải thì ta viết $D \in R(X)$. Nếu tồn tại một nghịch đảo phải $R \in L_0(X)$ thì ta viết $D \in R_0(X)$, $R \in \mathcal{R}_D$.

Ký hiệu:

$$\mathcal{F}_D = \left\{F \in L_0(X) \ : \ FX = \ker D,\ F^2 = F \text{ và } \underset{R \in \mathcal{R}_D}{\exists} FR = 0\right\}$$

Mỗi một toán tử $F \in \mathcal{F}_D$ sao cho $FR = 0$ đối với một $R \in \mathcal{R}_D$ được gọi là toán tử ban đầu của D tương ứng với R.

Ta có:

$$\ker D^n = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} R^k z_k \ : \ z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \ker D\right\}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Ký hiệu:

$$P_n(R) = \lim\{R^k z \ : \ z \in \ker D,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Ta đã biết $P_n(R) = \ker D^n \Leftrightarrow \dim\ker D = 1$.

Nói chung trong trường hợp tổng quát thì $P_n(R) \underset{\neq}{\subset} \ker D^n$.

Định nghĩa 1. [2]. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là có tính chất $c(R)$ nếu tồn tại hằng số c_k sao cho:

$$F_0 R^k z = c_k z, \quad \text{đối với mọi } z \in \ker D, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Một tập $\mathcal{F}_D^0 \subset \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ nếu mỗi một $F \in \mathcal{F}_D^0$ có tính chất $c(R)$.

Định lý 1. [2]. $\mathcal{F}_D^0(R) = \mathcal{F}_D \Leftrightarrow \dim\ker D = 1$

Ta đã biết, nếu $\dim\ker D > 1$ thì không phải mọi toán tử ban đầu đều có tính chất $c(R)$.

Định nghĩa 2. Cho $D \in R_0(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D(X)$. Một toán tử ban đầu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ được gọi là có tính chất $c(R)$ - suy rộng nếu như tồn tại các không gian con $Z_1, \ldots, Z_s$ của $\ker D$ sao cho:

$$\text{i/} \quad \ker D = \bigoplus_{j=1}^{s} Z_j; \quad Z_j \neq \{0\}; \quad Z_i \cap Z_j = \{0\}, \qquad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \ldots, s. \tag{1}$$

ii/ Tồn tại hằng số $c_{kj} \in \mathcal{F}$,

$$F_0 R^k z_j = c_{kj} z_j \quad \text{đối với tất cả } z_j \in Z_j, \quad k \in \mathbf{N} \tag{2}$$

Nếu $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng thì ta viết $F_o \in C_G(R)$

Bổ đề 1. $F_0 \in C_G(R)$ có tính chất $c(R)$ khi và chỉ khi đối với $Z_j \subset \ker D$ bất kỳ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ thỏa mãn (1), tồn tại hằng số $c_k \in \mathcal{F}$ sao cho

$$F_0 R^k z_j = c_k z_j, \quad \forall z_j \in Z_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{3}$$

Chứng minh:

$$\forall z \in \ker D, \quad z_j \in Z_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

sao cho: $z = z_1 + \cdots + z_s$. Khi đó:

$$F_o R^k z = \sum_{j=1}^{s} F_0 R^k z_j = \sum_{j=1}^{s} c_k z_j = c_k \sum_{j=1}^{s} z_j = c_k z.$$

Từ bổ đề 1 ta thấy rằng $F_0 \in \mathcal{F}_D$. có tính chất $c(R)$ thì F_0 có tính chất $c(R)$ - suy rộng.

Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng tồn tại $F_0 \in \mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng, nhưng không có tính chất $c(R)$.

Ví dụ 1. Cho $X = C^2(\mathbf{R})$, $D = \dfrac{d^2}{dt^2}$;

$$(RX)(t) = \int_0^t \int_0^\tau x(\sigma) d\sigma d\tau, \quad \ker D = \{\alpha e_1 + \beta e_2\};$$

$$e_1 = 1, \quad e_2 = t, \quad Z_1 = \text{lin}\{e_1\}, \quad Z_2 = \text{lin}\{e_2\}.$$

$$(\hat{F}_0 x)(t) = x(0) + \frac{1}{2}[x(1) + x(-1)] \in \mathcal{F},$$
$$(\hat{F}_1 x)(t) = x'(0) + \frac{1}{2}[x(1) - x(-1)] \in \mathcal{F}.$$

Dễ dàng thấy rằng: $\hat{F}_0^2 = \hat{F}_0$; $\hat{F}_1^2 = \hat{F}_1$,

$$R = \hat{R}_0^2, \quad \text{ở đây} \quad (\hat{R}_0 x)(t) = \int_0^t x(t)dt,$$

$$D = D_0^2, \quad \text{ở đây } D_0 = \frac{d}{dt}; \quad \hat{F}_0 X = \ker D_0, \quad \hat{F}_1 X = \ker D_0,$$
$$(F_0 x)(t) = (\hat{F}_0 x)(t).e_1 + (\hat{F}_1 x)(t).e_2; \quad e_2 = \hat{R}_0 e_1.$$

Xét $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, khi đó ta có: $z_1 = \alpha e_1$; $z_2 = \beta e_2$.

Ta có:

$$F_0 R^k z_1 = F_0 \hat{R}_0^{2k} z_1 = \alpha(\hat{F}_0 \hat{R}_0^{2k} e_1).e_1 + \alpha(\hat{F}_1 R_0^{2k} e_1).e_2 =$$
$$= \frac{\alpha}{2}\frac{(1)^{2k} + (-1)^{2k}}{(2k)!} \cdot e_1 + \frac{\alpha}{2}\frac{(1)^{2k} - (-1)^{2k}}{(2k)!} \cdot e_2 = \frac{1}{(2k)!} z_1$$

$$F_0 R^k z_2 = F_0 \hat{R}_0^{2k+1} z_1 = \beta(\hat{F}_0 \hat{R}_0^{2k+1} e_1).e_1 + \beta(\hat{F}_1 \hat{R}_0^{2k+1} e_1).e_2 =$$
$$= \frac{\beta}{2}\frac{(1)^{2k+1} + (-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} e_1 + \frac{\beta}{2}\frac{(1)^{2k+1} - (-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} e_2 = \frac{1}{(2k+1)!} z_2.$$

Từ đó ta có:

$$F_0 R^k z_1 = \frac{1}{(2k)!} z_1, \quad \forall z_1 \in Z_1$$
$$F_0 R^k z_2 = \frac{1}{(2k+1)!} z_2, \quad \forall z_2 \in Z_2$$

Như vậy: F_0 có tính chất $c(R)$ - suy rộng nhưng không có tính chất $c(R)$, (vì $(2k)! \neq (2k+1)!$ và theo bổ đề 1).

2. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ BIÊN TỔNG QUÁT

Giả sử $D \in R(X)$, $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng tương ứng với các không gian con $Z_1, \ldots, Z_s$ của $\ker D$ ($F_j \neq F_k$ với $j \neq k$).

Cho n tập hữu hạn I_j của các khoảng không âm với $\# I_j = r_j$; $r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} = N$.

Xét toán tử:

$$Q_D = \sum_{k=0}^{N} Q_k D^k$$

trong đó $Q_0, \ldots, Q_{N-1} \in L_0(X)$, $Q_N = I$.

Bài toán giá trị biên tổng quát đối với toán tử $Q(D)$ là: Tìm tất cả nghiệm của phương trình

$$Q(D)x = y, \quad y \in X \tag{4}$$

thỏa mãn điều kiện:

$$F_j D^k x = x_{jk}, \quad x_{jk} \in \ker D \quad (k \in I_j,\ j = 0, 1, \dots, n-1) \tag{5}$$

Theo giả thiết $F_0, \dots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng, ta có:

$$F_j R^k z_\nu = c_{jk\nu}, \quad \forall z_\nu \in Z_\nu \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, s \\ k \in \mathbf{N} \\ j = 0, 1, \dots, n-1, \end{array}$$

từ đó đối với mỗi $z_k \in \ker D$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, ta có:

$$F_j R^k z_k = F_j R^k \sum_{\nu=1}^{s} z_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{s} F_j R^k z_{k\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} c_{jk\nu} z_{k\nu} \quad \forall z_{k\nu} \in Z_\nu$$

$$\nu = 1, \dots, s$$
$$k, j = 0, 1, \dots, n-1$$

Viết:

$$\begin{aligned} b_{jk} &:= (c_{jk1}, c_{jk2}, \dots, c_{jks}) \\ Z_k &:= (z_{k1}, \dots, z_{ks})^T \\ W_N &:= (b_{jk}) \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1 \\ V_N &:= \det W_N. \end{aligned}$$

Giả sử bài toán giá trị biên đối với toán tử $Q(D) = D^N$ là thiết lập đúng đắn, tức là bài toán:

$$\begin{aligned} & D^N x = y \\ & F_j D^k x = x_{jk} \quad (k \in I_j; \quad j = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \tag{6}$$

có nghiệm duy nhất đối với mọi $y \in X$ và $x_{jk} \in \ker D$.

Ta đã biết (xem trong [8] bài toán (6) có nghiệm duy nhất đối với mọi $y \in X$ và $x_{jk} \in \ker D$ với giả thiết

$$V_N = \det W_N \neq 0 \tag{7}$$

và

$$\begin{aligned} & B_j R^k z = b_{jk} z, \quad z \in \ker D \\ & B_{r_0 + \dots + r_{j-1} + m} = F_j D^{k_j m} \\ & \qquad m = 1, \dots, r_j \\ & \qquad j = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Nghiệm của bài toán (6) viết dưới dạng:

$$x = U_N(x_0, \dots, x_{N-1}) \tag{9}$$

trong đó:

$$x_{r_0 + \dots + r_{j-1} + m} = x_{jk_j m}, \quad (m = 1, \dots, r_j;\ j = 0, 1, \dots, n-1) \tag{10}$$

$$U_N(x_0,\dots,x_{N-1}) = \sum_{j=0}^{N-1} V_{Nj}(R)x_j$$

$$V_{Nj}(t) = \frac{1}{V_N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^{k+j}V_{Njk}t^k \qquad (11)$$

$$(j = 0, 1, \dots, N-1)$$

và V_{Njk} là định thức con sinh bởi định thức V_N gạch đi cột thứ k và hàng thứ j, $(j,k = 0, 1, \dots, N-1)$.

Định nghĩa 3. Giả sử $D \in R(X)$, các toán tử ban đầu $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng và $V_N \neq 0$, cho $B_0, \dots, B_{n-1}$ xác định bởi (8), toán tử G_N xác định như sau:

$$G_N u = U_N(B_0u, \dots, B_{N-1}u) \quad \text{đối với } u \in \operatorname{dom} D^{N-1} \qquad (12)$$

trong đó U_N xác định bở (11).

Toán tử G_N được gọi là toán tử Green đối với toán tử D^N với điều kiện (5).

Bổ đề 2. Giả sử $F_0, \dots, F_{N-1}$ có tính chất $c(R)$ - suy rộng, khi đó một phần tử $x \in \operatorname{dom} D^N$ thỏa mãn điều kiện (5) khi và chỉ khi nó có dạng:

$$x = (I - G_N)R^N u + U_N(x_0, \dots, x_{N-1}) \qquad (13)$$

Chứng minh bổ đề này giống như chứng minh hệ quả 3.3 trong [8].

Định lý 2. [9]. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) được thỏa mãn,

Ký hiệu:

$$\tilde{Q}(t,p) = \sum_{k=0}^{N-1} Q_k t^k p^{N-k}, \quad Q_0, \dots, Q_{N-1} \in L_0(X) \qquad (14)$$

$$Q(t,p) = t^N + \tilde{Q}(t,p)$$

$$\tilde{Q}(D) = \tilde{Q}(D, I); \quad Q^0(R) = \tilde{Q}(I, R) \qquad (15)$$

Khi đó bài toán giá trị biên (4), (5) tương đương với phương trình

$$[I + G_N^0(R)]u = x_N \qquad (16)$$

trong đó:

$$G_N^0(R) = Q(I, R) - \tilde{Q}(D)G_N R^N \qquad (17)$$

$$X_N = y - \tilde{Q}(D)U_N(x_0, \dots, x_{N-1}) \text{ cho trước} \qquad (18)$$

Hệ quả 1. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) thỏa mãn:

(i) Nếu -1 là một giá trị chính quy của toán tử $G_N^0(R)$ thì bài toán (4), (5) là thiết lập đúng đắn và nghiệm duy nhất của bài toán là:

$$x = (I - G_N)R^N[I + G_N^0(R)]^{-1}x_N$$

(ii) Nếu -1 là giá trị riêng của toán tử $G_N^0(R)$ thì bài toán (4), (5) là thiết lập không đúng đắn, hay bài toán không có nghiệm hoặc có nhiều hơn 1 nghiệm. Bài toán (4), (5) có nghiệm khi và chỉ khi:

$$x_N \in [I + G_N^0(R)]X.$$

Nếu điều kiện trên thỏa mãn thì các nghiệm của bài toán (4), (5) có dạng:

$$x = (I - G_N)R^N(w + v),$$

trong đó $w \in \ker[I + G_N^0(R)]$ bất kỳ và v là một phần tử cố định bất kỳ của nghịch ảnh của phần tử x_N bởi ánh xạ $I + G_N^0(R)$.

Định lý 3. [9]. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) thỏa mãn và toán tử $Q(I, R)$ khả nghịch. Nếu toán tử

$$A = I - G_N R^N [Q(I, R)]^{-1}\tilde{Q}(D)\Big|_{\ker D^N}$$

khả nghịch trên $\ker D^N$ thì toán tử $I + G_N^0(R)$ khả nghịch trên X.

Hệ quả 2. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) thỏa mãn và toán tử $Q(I, R)$ khả nghịch. Nghiệm của bài toán giá trị biên (4), (5) có dạng sau:

$$x = R^N[Q(I, R)]^{-1}x_N + U_N x_0, \ldots, x_{N-1}.$$

Định lý 4. [9] . Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) được thỏa mãn, khi đó toán tử A khả nghịch trên $\ker D^N$ khi và chỉ khi hệ

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{b_{ik}I - B_i R^N [Q(I, R)]^{-1}\tilde{Q}(D)R^k\} z_k = x_i - B_i R^N [Q(I, R)]^{-1} y, \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{19}$$

có nghiệm duy nhất $(z_0, \ldots, z_{N-1})$, ở đây $z_0, \ldots, z_{N-1} \in \ker D$.

Định lý 5. Giả sử tất cả các điều kiện của định nghĩa (3) được thỏa mãn, khi đó hệ (19) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi các toán tử

$$\Phi_i = B_i\{I - R^N[Q(I, R)]^{-1}\tilde{Q}(D)\}, \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

độc lập tuyến tính trên $\ker D^N$.

Chứng minh. Từ (8) ta có: $b_{ik}z = B_i R^k z$, $z \in \ker D$, $(i, k = 0, 1, \ldots, N_1)$, khi đó hệ (19) có thể viết lại dưới dạng

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_i\{I - R^N[Q(I, R)]^{-1}\tilde{Q}(D)\}R^k z_k = y_i \tag{20}$$

ở đây

$$y_i = x_i - B_i R^N [Q(I, R)]^{-1} y \in \ker D, \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1)$$

ta có:

$$z_k = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_{k\nu} e_\nu, \quad y_k = \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{\nu k} e_\nu$$

Viết:

$$\alpha_k := (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks})$$
$$\beta_k := (\beta_{k1}, \ldots, \beta_{ks}) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1)$$
$$e := (e_1, \ldots e_s)^T$$

Từ đó hệ (20) có dạng:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \Phi_i(R^k e) = B_i e \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{21}$$

trong đó $0 \neq e \in \ker D$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}$, $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ là các hằng số.

Xét $v \in \ker D^N$, khi đó $v = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k R^k e$, từ (21) ta có $\Phi_i v = B_i e$, do đó Φ_i là ánh xạ từ $\ker D^N$ vào $\ker D$. Điều này chứng tỏ rằng tồn tại các hàm tuyến tính φ_i sao cho:

$$\Phi_i(R^k e) = \varphi_i(R^k e) e \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Viết $d_{ik} = \varphi_i(R^k e)$, $(i, k = 0, 1, \ldots, N-1)$, khi đó từ (21) ta có hệ N phương trình với N ẩn $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N-1}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_{ik} \alpha_k = \beta_i \quad (i = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{22}$$

trong đó $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ là các hằng số đã cho.

Ta đã biết hệ (22) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\det\,(d_{ik})_{i,k=0,\ldots,N-1} \neq 0.$$

Giả sử $\Phi_0, \ldots, \Phi_{N-1}$ là phụ thuộc tuyến trên $\ker D^N$, điều này có nghĩa là tồn tại các hằng số $\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1}$ không đồng thời bằng 0, sao cho:

$$0 = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Phi_m v = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \Phi_m \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k R^k e = \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \Phi_m(R^k e) =$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \sum_{k=0}^{N-1} d_{mk} \alpha_k \sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m \beta_m.$$

Từ đó ta có: $\det\,(d_{ik})_{i,k=0,1,\ldots,N_1} = 0$, do đó hệ (22) không có nghiệm duy nhất hay hệ (19) không có nghiệm duy nhất.

Ngược lại, giả sử hệ (19) không có nghiệm duy nhất. Điều đó có nghĩa là $\det\,(d_{ik})_{i,k=0,\ldots,N-1} = 0$, tức là tồn tại các hằng số $\gamma_0, \ldots, \gamma_{N-1}$ không đồng thời bằng 0 sao cho:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \beta_i = 0$$

Khi đó:

$$0 = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \beta_i\Big) e = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{N-1} d_{ik} \alpha_k\Big) e =$$
$$= \Big[\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_i(R^k e)\Big] e = \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i \Phi_i\Big) v$$

trong đó $v \in \ker D^N$

Từ đó ta có $\Phi_0, \ldots, \Phi_{N-1}$ là phụ thuộc tuyến tính trên $\ker D^N$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Przeworska - Rolewicz, Algebraic analysis, PWN - Polish Scientific Publishers, and D. Reidel Publ Company, Warszawa / Dordrecht/ Landcaster/Tokyo 1988.
2. D. Przeworska-Rolewicz, Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators, Demostratio Math; 21 (1988), 1023-1044.
3. D. Przeworska-Rolewicz, Linear boundary value problems for right invertible operators, Preprint 413, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warszawa 1988.
4. D. Przeworska-Rolewicz, Spaces of D-paraanalytic elements. Dissertationes Math. No 302, Warszawa 1990.
5. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular integral equations. Demonstratio Math. 23 (1990), 191-212.
6. Nguyen Van Mau, Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators, Dissertationes Math, CCC XVI, Warszawa 1992.
7. Nguyen Van Mau and Pham Quang Hung: On a general classical interpolation problem, Journal of Science, special issue on Mathematics Mechanics and Informatics, Hanoi University, 1993. 2-6.
8. W. Z Karwowski and D. Przeworska-Rolewicz, Green operators for linear boundary value problems with a right invertible operators D^N, Math. Nachr. 152 (1991), 21-34.
9. W. Z. Karwowski and D. Przeworska-Rolewicz, General linear boundary value problems for polynomials invertble operators. Demonstratio Math. 25 (1992), 325-340.

GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR POLYNOMIALS IN RIGHT INVERTIBLE OPERATORS

Pham Quang Hung
Faculty of Mathematics, Mechanics and informatics
Hanoi University

The $c(R)$ - Property for initial operators induced by a given right inverse was introduced and applied to boundary value problemsa and general linear boundary value problems for polynomials in right invertible operators by D. Przeworska-Rolewicz, Nguyen Van Mau and W. Z. Karwowski. In this paper we introduce the generalized $c(R)$ - property and apply to solve the general boundary value problems.

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k D^k x = y, \qquad F_j D^k x = x_{jk}, \quad (k \in I_j, \quad j = 0, \ldots, n-1).$$