TẠP CHÍ KHOA HỌC No 5 - 1991

Bùi Đức Tiến

PHƯƠNG PHÁP HÀM TRỘI LIAPUNOV VÀ BÀI TOÁN BIÊN TUẦN HOÀN PHI TUYẾN

Trong bài này ta sẽ nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp lặp đơn giải bài toán biên tuần
oàn phi tuyến:

$$
\begin{aligned}
&x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}), \qquad 0 < t < 1 \\
&x^{(j)}(0) = x^{(j)}(1), \qquad j = \overline{0, n-1}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ing phương pháp hàm trội Liapunov.

1. DẠNG TOÁN TỬ CỦA BÀI TOÁN BIÊN TUẦN HOÀN

Trong phần này sẽ đưa bài toán (1) về dạng toán tử để có thể áp dụng được phương pháp
m trội Liapunov.

1.1. Đưa bài toán biên tuần hoàn về dạng toán tử

Bổ đề. Không gian

$$X = C^{(n)}_{0[0,1]} = \left\{ x \in C^{(n)}_{[0,1]} : x^{(j)}(0) = x^{(j)}(1) \quad j = \overline{0, n-1} \right\}$$

i chuẩn $\forall x \in X$, $|||x||| = \max(\|x\|, \|x^{(n)}\|) = \max(\max\limits_{t \in [0,1]} |x(t)|, \max\limits_{t \in [0,1]} |x^{(n)}(t)|)$ là không gian
nach.

Chứng minh: Dễ dàng kiểm tra $||| \cdot |||$ là chuẩn. Ta còn phải chứng minh không gian X
i chuẩn này là đầy đủ. Giả sử $\{x_k\}$ là dãy cơ bản trong X, suy ra $\{x_k\}$ và $\{x_k^{(n)}\}$ là c'c dãy
bản trong $C_{[0,1]}$ với chuẩn $\forall y \in C_{[0,1]}$, $\|y\| = \max\limits_{t \in [0,1]} |y(t)|$.

Do $(C_{[0,1]}, \| \cdot \|)$ là không gian Banach nên tồn tại $x, y_n \in C_{[0,1]}$ sao cho $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{\| \cdot \|} x$ và
$) \xrightarrow[k \to \infty]{\| \cdot \|} y_n$. Ta sẽ chứng minh $x \in X$.

Xét $x_k^{(n-1)}(t) = x_k^{(n-1)}(0) + \int\limits_0^t x_k^{(n)}(s) ds$. Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 và chú ý rằng
$)(0) = x_k^{(j)}(1)$, $j = \overline{0, n-1}$, ta có:

$$O = x_k^{(n-1)}(0) + \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t x^{(n)}(s) ds.$$

Nên

$$x_k^{(n-1)}(t) = \int_0^t x_k^{(n)}(s))ds - \int_0^1 dt \int_0^t x_k^{(n)}(s)ds \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^t y_n(s)ds - \int_0^1 dt \int_0^t y_n(s)ds \equiv y_{n-1}(t$$

suy ra

$$\dot{y}_{n-1}(t) = y_n(t) \text{ và } y_{n-1}(0) = \lim_{k\to\infty} x_k^{(n-1)}(0) = \lim_{k\to\infty} x_k^{(n-1)}(1) = y_{n-1}(1)$$

Tương tự

$$x_k^{(n-2)}(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_{n-2}(t) \text{ và } \dot{y}_{n-2}(t) = y_{n-1}(t), \; y_{n-2}(0) = y_{n-2}(1).$$

tiến hành đến bước thứ $(n-1)$ ta có:

$$x_k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_0(t), \quad \dot{y}_0(t) = y_1(t), \quad y_0(0) = y_0(1)$$

Mặt khác $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ nên $x \equiv y_0$. Đó là điều phải chứng minh.

Đặt:

$$Y = C_{[0,1]}, \quad \forall y \in Y \;:\; \|y\| = \max_{t\in[0,1]} |y(t)|$$

Bài toán (1) có thể đưa về dạng phương trình toán tử sau:

$$Ax = F(x)$$

trong đó $A \in L(X,Y)$ là toán tử tuyến tính giới nội, còn F là toán tử phi tuyến từ X vào

$$A : X \longrightarrow Y \qquad\qquad F : X \longrightarrow Y$$
$$x(t) \to x_1^{(n)}(t) \qquad\qquad x(t) \to f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}$$

Đặt

$$X_1 = \left\{x \in X \;:\; \int_0^1 x(s)ds = 0\right\}, \qquad X_2 = \left\{\text{const}\right\}$$

$$Y_1 = \left\{y \in Y \;:\; \int_0^1 y(s)ds = 0\right\}, \qquad Y_2 = \left\{\text{con}\right\}$$

Chú ý rằng các kết quả ở [1] đều đúng đối với các không gian này nên: $X = X$ $Y = Y_1 \oplus Y_2$, $\ker A = X_2$, $\operatorname{Im} A = Y_1$.

Gọi $\hat{A}$ là hạn chế của A trên X_1, thì $\hat{A}$ có nghịch đảo giới nội $\hat{A}^{-1}$. Gọi P và Q là c chiếu trên X và Y:

$$P : X \longrightarrow X_1 \qquad\qquad Q : Y \longrightarrow Y_1$$
$$x \longrightarrow \int_0^1 x(s)ds \qquad\qquad y \longrightarrow \int_0^1 y(s)ds$$

Rõ ràng ImA = kerA, kerQ = ImA nên:

$$X = \ker A \oplus \ker P, \quad Y = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} Q \quad \text{và} \quad r\hat{A}^{-1} \equiv 0.$$

Gọi J là toán tử tuyến tính giới nội từ $\mathrm{Im}Q$ lên $\mathrm{Im}P$:

$$J : \mathrm{Im}Q \longrightarrow \mathrm{Im}P$$
$$c \longrightarrow c$$

Từ [2] có (2) tương đương với phương trình sau

$$x = Px + JQF(x) + \hat{A}^{-1}(I-Q)F(x) \equiv M(x) \tag{3}$$

1.2. Xây dựng $\hat{A}^{-1}$

Xét bài toán bổ trợ của bài toán (1)

$$\begin{aligned} &w^{(n+1)}(t) = y(t) \\ &w(0) = w(1) = 0, \quad w^{(j)}(0) = w^{(j)}(1) \quad (j = \overline{1, n-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Từ [1], hàm Grin của (4) có dạng:

$$G(t,s) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n & 0 \le t \le s \\ b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n & s < t \le 1 \end{cases} \tag{5}$$

ong đó $a_i = a_i(s)$, $b_i = b_i(s)$, $i = \overline{0,n}$ được xác định từ các hệ phương trình sau:

$$n! C_n = 1$$
$$\sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(n-k)!} C_i S^{i-k} = 0, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0 \tag{6}$$
$$C_i = b_i - a_i, \quad i = \overline{0,n}$$
$$a_0 \equiv 0 \tag{7}$$
$$\sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k+1)!} b_i = -(k-1)! C_{k-1}; \quad k = \overline{1,n} \tag{8}$$

Ta chứng minh rằng nghiệm của (6) tìm được theo công thức sau:

$$C_i = (-1)^{n-1} \frac{s^{n-i}}{i!(n-i)!}, \quad i = \overline{0,n} \tag{9}$$

Đặt $C_i = \dfrac{\tilde{C}_i s^{n-i}}{i!}$, **thay vào (6) ta có:**

$$\tilde{C}_n = 1$$
$$\sum_{i=k}^{n} \frac{\tilde{C}_i}{(i-k)!} = 0, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 0$$

Phải chứng minh $\tilde{C}_i = \dfrac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}$, $i = \overline{0,n}$

= n : đúng.

$$\forall k < n : \sum_{i=k}^{n} \frac{\bar{C}_i}{(i-k)!} = \sum_{i=k}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(i-k)!(n-i)!} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^{n-j-k}}{j!(n-j-k)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j C_{n-k}^j = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} [1-1]^{n-k} = 0.$$

Từ (9), (7) và (8) ta có hệ n phương trình để xác định b_i, $i = \overline{1,n}$

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k+1)!} b_i = (-1)^{n-k} \frac{s^{n+k-1}}{(n-k+1)!}, \quad k = \overline{1,n}$$
$$b_0 = (-1)^n \frac{s^c}{n!} \qquad (1$$

và n hệ thức để xác định a_i, $i = \overline{1,n}$

$$a_i = b_i - (-1)^{n-i} \frac{s^{n-i}}{i!(n-i)!}, \quad i = \overline{1,n}$$
$$a_0 \equiv 0 \qquad (1$$

Giải (10) và (11) ta xác định được $G(t,s)$

Từ [1] ta có :

$$\hat{A}^{-1} y(t) = \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} y(s) ds, \quad \forall y \in Y_1$$

Thay vào (3) các công thức của P, J, Q, $\hat{A}^{-1}$ ta có:

$$x(t) = \int_0^1 x(s)ds + \int_0^1 F(x)(s)ds +$$
$$+ \int_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} \Big[F(x)(s) - \int_0^1 F(x)(\tau)d\tau\Big] ds \equiv M(x) \qquad ($$

1.3. Giảm nhẹ chuẩn

Bài toán (1) được đưa về phương trình tích phân (12) trong không gian X gặp nhiều khăn do chuẩn $|||\cdot|||$ khá "chặt". Ta chứng minh rằng có thể xét phương trình (12) trong kh gian $C_{[0,1]}$ với chuẩn $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|$

Giả sử rằng dom$F \subset C_{[0,1]}$. (Ví dụ, khi $F(x) = f(t, x(t))$.

Nhúng A vào $C_{[0,1]}$. Thác triển P lên toàn $C_{[0,1]}$. Khi đó (12) xác định trên dom$M$ = dom $C_{[0,1]}$.

Hiển nhiên nếu $x^* \in X$ là nghiệm của (12) thì $x^* \in C_{[0,1]}$ và đẳng thức $x^* = Mx^*$ đúng tr $C_{[0,1]}$.

Ngược lại, nếu $\widetilde{x^*} \in \mathrm{dom}M \subset C_{[0,1]}$ và thỏa mãn phương trình $\widetilde{x^*} = M\widetilde{x^*}$ thì $\widetilde{x^*} \in X$ vì:

i) Tồn tại $\widetilde{x^*}^{(n)}(t)$ liên tục $\left(\widetilde{x^*}^{(n)}(t) = \frac{d^n M\widetilde{x^*}(t)}{dt^n} = F(\widetilde{x^*})(t) - \int\limits_0^n F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau\right)$.

ii)

$$\widetilde{x^*}(0) = \int\limits_0^1 \widetilde{x^*}(s)ds + \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*}))(s)ds + \int\limits_0^1 \frac{\partial G(0,s)}{\partial t}[F(\widetilde{x^*})(s) - - \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau]ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \widetilde{x^*}(s)ds + \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(s)ds + \int\limits_0^1 \frac{\partial G(1,s)}{\partial t}[F(\widetilde{x^*})(s) - \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau]ds = \widetilde{x^*}(1).$$

$$\widetilde{x^*}^{(i)}(0) = \int\limits_0^1 \frac{\partial^{i+1}G(0,s)}{\partial t^{i+1}}[F(\widetilde{x^*})(s) - \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau]ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial^{i+1}G(1,s)}{\partial t^{i+1}}[F(\widetilde{x^*})(s) - \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau]ds = \widetilde{x^*}^{(i)}(1), i = \overline{1, n-2}$$

$$\widetilde{x^*}^{(n-1)}(0) - \widetilde{x^*}^{(n-1)}(1) = -\int\limits_0^1 \widetilde{x^*}^{(n)}(s)ds = -\int\limits_0^1 [F(\widetilde{x^*})(s) - \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau]ds = 0.$$

nữa $\forall x_0 \in (C_{[0,1]} \cap \mathrm{dom}M)$ thì $x_1 = M(x_0) \in X$. Do đó dãy xấp xỉ liên tiếp $\{x_k | x_k = \ldots_{k-1})\}_{k=1}^{\infty} \cap X$. Giả sử $\|x - \widetilde{x^*}\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ thế thì $|||x_k - \widetilde{x^*}||| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (vì

$$\|x_k^{(n)} - x^{(n)}\| = \|F(x_{k-1}) - \int\limits_0^1 F(x_{k-1})(\tau)d\tau - [F(\widetilde{x^*}) - \int\limits_0^1 F(\widetilde{x^*})(\tau)d\tau]\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0)$$

Áp dụng các kết quả của lý thuyết hàm trội Liapunov [3] cho (12) trong một số trường hợp ... thể chỉ ra được sự tồn tại và duy nhất nghiệm và sự hội tụ của quá trình lặp đến nghiệm

Trong phần tiếp theo ta sẽ xét một trường hợp cụ thể của bài toán (1).

2. TRƯỜNG HỢP CỤ THỂ

2.1. Xét bài toán (1) trong trường hợp $n = 2$ và vế phải $f(t,x) = \sum\limits_{i=0}^{m} f_i(t)x^i$, $f_i(t)$ là các liên tục $(i = \overline{0,m})$ $f_1(t) \equiv \text{const}$. Tức là:

$$\begin{gathered} \ddot{x} = \sum_{i=0}^{m} f_i(t)x^i, \qquad 0 < t < 1 \\ x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1) \end{gathered} \tag{13}$$

Từ (10), (11) và (5) ta có:

$$G(t,s)=\begin{cases}(-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2})t+(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})t^2 & 0\le t\le s\\ (-\frac{s^2}{2}-\frac{s}{2})t+\frac{st^2}{2}+\frac{s^2}{2} & s<t\le 1\end{cases}\tag{14}$$

do đó

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}=\begin{cases}(-\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2})+(s-1)t & 0\le t\le s\\ (-\frac{s2}{2}-\frac{s}{2})+st & 0<t\le 1\end{cases}\tag{15}$$

$$g(t)=\int_0^1\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}ds=\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\tag{16}$$

Từ (12) ta có (13) là tương đương với phương trình sau:

$$x(t)=\int_0^1\left[1+\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}-g(t)\right]f_0(s)ds+\int_0^1\left[1+f_1+\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f_1-g(t)f_1\right]x(s)ds+$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\int_0^1\left[1+\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}-g(t)\right]f_i(s)x^i(s)ds\equiv M(x)\tag{17}$$

Trong không gian $C_{[0,1]}$. DomM = domF = $C_{[0,1]}$.
Đặt

$$d_1=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1\left|1+f_1+\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}f_1-g(t)f_1\right|ds=$$

$$=|f_1|\max_{t\in[0,1]}\left[\int_0^t\left|\tilde g(t)+\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|ds+\int_0^1\left|\tilde g(t)+\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}\right|ds\right]\tag{18}$$

trong đó $\tilde g(t)=\frac{1}{f_1}+1-g(t)$, $f_1\neq 0$.

Các biểu thức dưới dấu tích phân đều là tam thức bậc 2 theo s nên ta có thể khảo sát chúng và tính đúng được các tích phân đó:

Đặt: $\Delta=\frac{25}{12}+\frac{2}{f_1}$ ta có

$$d_1=\begin{cases}-1-f_1 & \text{khi } f_1\le-\frac{12}{11} & (19)\\ -f_1\left(\frac{4}{3}\Delta\sqrt{\Delta}-\frac{1}{2}\Delta+\frac{1}{24}\right) & \text{khi } -\frac{12}{11}<f_1<-\frac{24}{25} & (20)\\ 1+f_1 & \text{khi } -\frac{24}{25}\le f_1 & (21)\end{cases}$$

Vì $d_1>1$ khi $f\le -2$, nên trong các trường hợp tương ứng lhông áp dụng được phương pháp hàm trội Liapunov.

Ta có

$$\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |f_i(\cdot) + \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f_i(s) - g(t)f_i(s)|ds \le$$

$$\le \|f_i\| \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 |1 - g(t) + \frac{\partial G(t,s)}{\partial t}|ds = \|f_i\| \equiv d_i, \quad i = \overline{0,2,m} \tag{22}$$

Theo [3] thì phương trình vô hướng

$$u = \sum_{i=0}^{m} d_i U^i \tag{23}$$

trội của phương trình (17).

Để phương trình (23) có nghiệm thì d_0 phải không lớn hơn d_{0max}, trong đó d_{0max} được xác nh từ hệ sau:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1} m\, i d_i u_{max}^{i-1} = 1 \\ &d_{0max} + \sum_{i=1}^{m} d_i u_{max}^i = u_{max} \end{aligned} \tag{24}$$

Hệ này luôn có nghiệm duy nhất $u_{max} > 0$, $d_{0max} > 0$.

Thật vậy, xét phương trình đầu của (24):

$$\sum_{i=1} m\, i d_i u_{max}^{i-1} = 1 \Longleftrightarrow \varphi(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} i d_i u^{i-1} - 1 = 0$$

Do

$$\varphi(0) = d_1 - 1 < 0, \qquad \varphi(\infty) = \infty,$$

$$\varphi'(u) = \sum_{i=2}^{m} i(i-1) d_i u^{i-2} > 0 \quad \forall u \in (0, \infty)$$

ìn tồn tại duy nhất $u_{max} > 0$ để $\varphi(u_{max}) = 0$

Từ phương trình thứ hai của (24) ta có: $d_{0max} = u_{max} - \sum\limits_{i=1}^{m} d_i u_{max}^i$.

Ta chứng minh rằng $d_{omax} > 0$

Xét $\psi(u) = u - \sum\limits_{i=1}^{m} d_i u^i$ có $\psi(0) = 0$, $\psi'(u) = -\varphi(u) > 0\ \forall u \in (0, u_{max})$ Nên $d_{0max} =$ $u_{max}) > 0$.

Từ các kết quả trên và [3] ta có định lý sau:

Định lý : Giả sử các $d_i (i = \overline{0,m})$ được xác định theo công thức (19) hoặc (20) **hoặc (21) và** 2). khi đó nếu $0 < d_0 < d_{0max}$ thì bài toán (13) có nghiệm duy nhất tronh hình cầu $\|x\| \le u_{max}$ quá trình lặp sau hội tụ đến nghiệm này:

$$x_0(t) \equiv 0$$

$$x_{k+1}(t) = \int_0^1 [1 + \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} - g(t)] f_0(s)ds + \int_0^1 [1 + f_1(1 + \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} - g(t))] x_k(s)ds + \qquad (25)$$

$$+ \sum i = 2^m \int_0^1 [1 + \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} - g(t)] f_i(s) x_k^i(s) ds$$

2.2. Ví dụ

Tìm nghiệm của bài toán:

$$\ddot{x} = \varepsilon(1 - 8x + x^2), \quad 0 < \varepsilon < 0,12$$
$$x(0) = x(1), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(1)$$

Bài toán này có nghiệm dừng $x^*(t) \equiv 4 - \sqrt{15}$.
$d_0 = \|f_0\| = \varepsilon, \quad d_1 = 1 - 8\varepsilon < 1, \quad d_2 = \|f_2\| = \varepsilon$
$u_{max} = 4, \quad d_{0max} = 16\varepsilon > d_0$.
Vậy tronh hình cầu $\|x\| \leq 4$ bài toán trên có nghiệm duy nhất và nghiệm này tìm được nhờ quá trình lặp (25). Kết quả chạy máy tính là sau 13 bước lặp với $\varepsilon = 0,1$: $\|x_{13} - x^k\| < 10^{-7}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Fam Ki Anh, Vu Huy Tich. An inleration method for general BVP. Uerain. Math. J. 1983, V. 35 No 3, 348-352, (in Russ).
2. J. Mawhin. Equations nonlineares dans les especes de Banach. Rapport No 39, Aout 1971, Seminaires et Appl. Univ. Catholique de Louvain.
3. E. A. Grebenikov, Yu. A. Ryabov. Constructive methods in the analysis of nonlinear sydtems. Engl. trans., Mir Pullishers, 1983, 328 pp.

Bui Duc Tien

LIAPUNOVS MAJORIZING METHOD AND
NONLINEAR PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

This paper is conserned with an application of the Liapunov's majorizing method to the following nonlinear periodic BVP

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}), \quad 0 < t < 1$$
$$x^{(j)}(0) = x^{(j)}(1), \quad j = \overline{0, n-1}$$

Khoa Toán Cơ Tin Học - ĐHTH Hà Nội