ẠP CHÍ KHOA HỌC No 5 - 1991

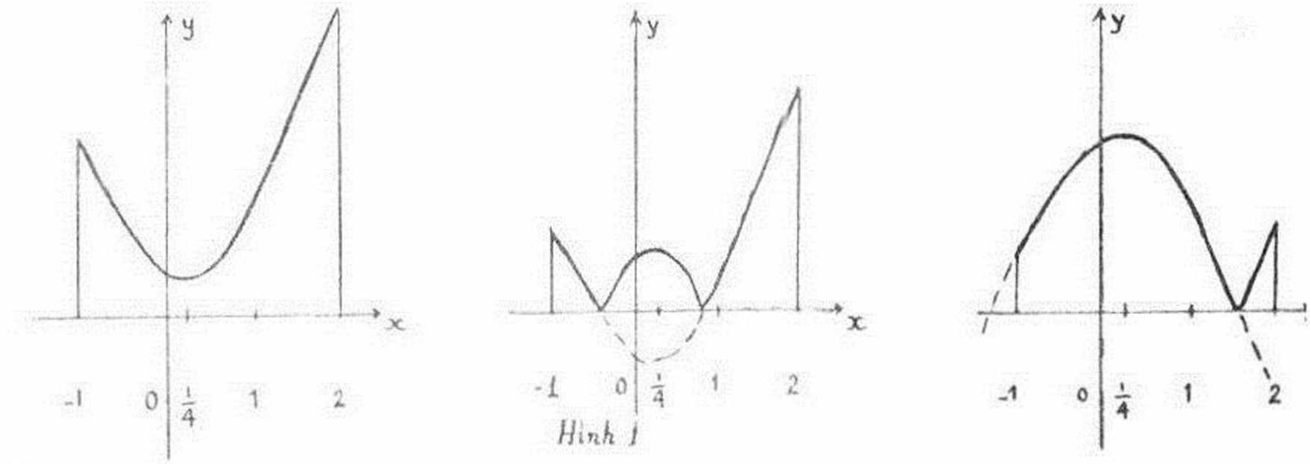
oàng Đức Nguyên
ý Quốc Hào

'NG DỤNG ĐỊNH LÝ TSÊBƯSÉP Ề XẤP XỈ ĐỀU TỐT NHẤT Ể GIẢI CÁC BÀI TOÁN MIN - MAX

Trong đề thi đại học khối A năm 1986 có bài:

Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-4x^2 + 2x + m|$ ứng với $-1 \leq x \leq 2$ là nhỏ nhất.

Bài này có thể giải bằng phương pháp đồ thị. Vì parabôn $y = -4x^2 + 2m + m$ khi m thay ì luôn có hoành độ đỉnh là $x = \dfrac{1}{4}$ nên khi m thay đổi đồ thị hàm số $y = |-4x^2 + 2x + m|$ có các ıng sau



Hình 1

Từ đồ thị ta suy ra giá trị lớn nhất của $y = |-4x2 + 2x + m|$ trên $[-1; 2]$ chỉ có thể đạt tại $= 2$ với $y = |m - 12|$ hoặc $x = \dfrac{1}{4}$ với $y = |m + \dfrac{1}{4}|$ vậy để giá trị lớn nhất là nhỏ nhất thì:

$$|m - 12| = |m + \frac{1}{4}| \iff m^2 - 24m + m^2 = m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{16} \iff m = \frac{47}{8}.$$

Bài toán trở nên rất phức tạp nếu hệ số của x có chứa tham số hoặc biểu thức trong dấu giá ị tuyệt đối không còn là hàm số bậc hai. Để giải quyết bài toán này chúng ta hãy nghiên cứu nh lý Tsêbư sép về xấp xỉ đều tốt nhất.

I. ĐA THỨC XẤP XỈ ĐỀU TỐT NHẤT CỦA HÀM SỐ

Gọi R là tập hợp các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[a, b]$ và R^* là tập hợp các đa ức $p(x)$ bậc nhỏ hơn hoặc bằng n.

Nếu với mỗi hàm số $f(x)$ thuộc R ta tìm được đa thức $p^*(x)$ thuộc R^* sao cho

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| = \min_{p(x)\in R^*} \left[\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \right]$$

thì đa thức $p^*(x)$ được gọi là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ trong tập R^*.

Trong lý thuyết về phương pháp tính người ta chứng minh được rằng đa thức xấp xỉ đều tốt nhất luôn luôn tồn tại và duy nhất.

Vậy với đa thức xấp xỉ đều tốt nhất ta đã chuyển bài toán min-max về bài toán max.

Vấn đề là phải tìm được $p^*(x)$. Định lý Tsêbusép về xấp xỉ đều tốt nhất sẽ giải quyết vấn đề này.

II. ĐỊNH LÝ TSÊBƯSEP

Gọi $L = \max|f(x) - p^*(x)|$. Điều kiện cần và đủ để đa thức $p^*(x)$ xấp xỉ đều tốt nhất hàm số $f(x)$ trên $[a,b]$ là tồn tại ít nhất $n+2$ điểm $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}$ trên $[a,b]$ sao cho tại các điểm đó hiệu $f(x) - p(x)$ nhận lần lượt các giá trị L và $-L$. Các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ gọi là các điểm luân phiên Tsê bư sép.

Ta công nhận điều kiện cần rồi chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $p^*(x)$ thỏa mãn điều kiện của định lý song không phải là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất. Còn $\overline{p}(x)$ là đa thức xấp xỉ đều tốt nhất của $f(x)$ trên $[a,b]$ khi đó ta xét hiệu:

$$\overline{p}(x) - p^*(x) = [f(x) - p^*(x)] - [f(x) - \overline{p}(x)].$$

Tại các điểm luân phiên Tsê bư sép: $f(x) - p^*(x)$ lần lượt nhận các giá trị L và $-L$ còn $f(x) - \overline{p}(x)$ có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn L. Vậy đa thức $H(x) = \overline{p}(x) - p^*(x)$ nhận các giá trị lần lượt trái dấu nhau tại $n+2$ điểm luân phiên Tsê bư sép nên nó có ít nhất $n+1$ nghiệm, điều này trái với bậc của $H(x)$ là nhỏ hơn hoặc bằng n.

III. ÁP DỤNG

Bài 1

Trở lại bài toán nêu ở phần mở đầu: Tìm m để hàm số $y = |-4x^2 + 2x + m|$ có giá trị lớn nhất là nhỏ nhất khi $-1 \le x \le 2$.

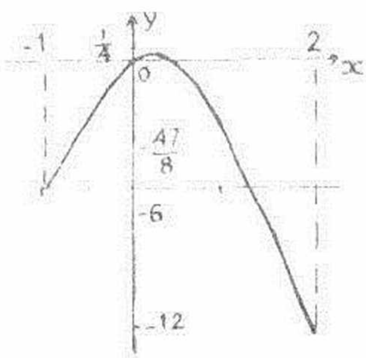
Giải: Vấn đề là tìm m để

$$\min_m \left[\max_{-1 \le x \le 2} |-4x^2 + 2x + m| \right] =$$

$$= \max_{-1 \le x \le 2} |-4x^2 + 2x + m^*|$$

hay là tìm đa thức bậc không $p(x) = -m$ xấp xỉ đều tốt nhất hàm số $f(x) = -4x^2 + 2x$. Vì $\max\limits_{-1 \le x \le 2} f(x) = 1/4$ và $\min\limits_{-1 \le x \le 2} f(x) = -12$ ta lấy

$$-m = (1/4 + (-12)) : 2 = -47/8 \iff m = 47/8$$



Hình 2

khi đó ta có hai điểm luân phiên Tsê bư sép đó là $x_1 = 1/4$ và $x_2 = 2$ tại đó:

$$f(1/4) - p(1/4) = 49/8, \qquad F(2) - p(2) = -49/8$$

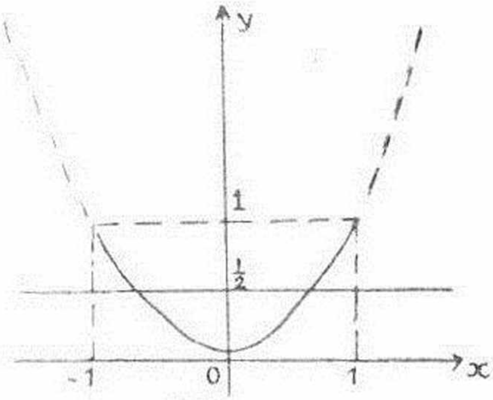
Vậy khi $m = 47/8$ thì giá trị lớn nhất của $|-4x^2 + 2x + m|$ trên $[-1;2]$ là nhỏ nhất và bằng giá trị lớn nhất của $|-4x^2 + 2x + 47/8|$ trên $[-1;2]$ là $49/8$.

Bài 2

Tìm a, b để $\max|x^2 + ax + b|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải: Ta phải tìm đa thức $p(x) = -(ax + b)$ xấp xỉ
u tốt nhất hàm số $f(x) = x^2$ trên $[-1, 1]$.

Theo định lý Tsê bư sép ta cần tìm ba điểm x_1, x_2, x_3
$f(x) - p(x)$ nhận lần lượt các giá trị L và $-L$. Dựa vào
thị ta thấy nếu lấy $p(x) = 1/2$ tức $a = 0$, $b = -1/2$ thì
ba điểm Tsê bư sép đó là $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Ta
$x^2 - 1/2$ lần lượt bằng $1/2$ và $-1/2$. Vậy với $a = 0$,
$= -1/2$ thì $\max|x^2 + ax + b|$ khi $-1 \le x \le 1$ đạt giá trị
ỏ nhất bằng $1/2$.

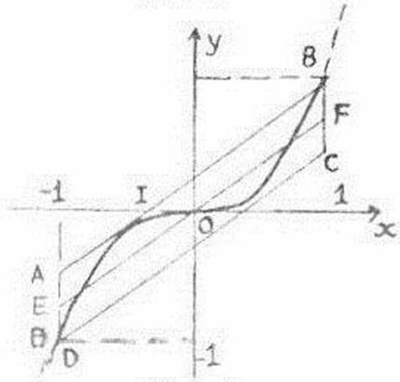


Hình 3

Bài 3

Tìm a, b, c để $\max|x^3 + ax^2 + bx + c|$ đạt giá trị nhỏ
ất.

Giải: Ta phải tìm $p^*(x) = -(ax^2 + bx + c)$ xấp xỉ đều
nhất $f(x) = x^3$ trên $[-1; 1]$. Cần tìm 4 điểm mà tại đó
$) - p^*(x)$ nhận các giá trị L và $-L$. Bao x^3 bởi hình
h hành ABCD, tạo bởi hai tiếp tuyến song song AB và
. Lấy đường trung bình EF. Phương trình của EF chính
$p^*(x)$ vì có hoành độ của 4 điểm A, I, K, B mà tại đó
$) - p^*(x)$ nhận lần lượt các giá trị $1/4$ và $-1/4$.



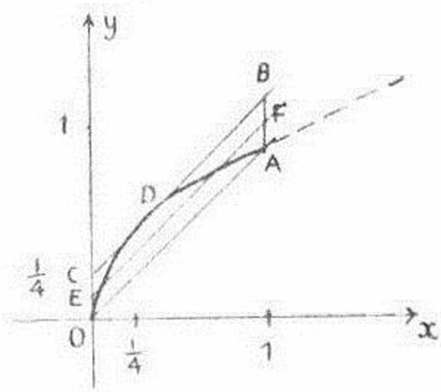
Hình 4

Phương trình tiếp tuyến AB là $y = k(x - 1) + 1$ với điều kiện $k(x - 1) + 1 = x^3$; $k = 3x^2$
$x \neq 1$ vậy $y = (3/4)x + 1/4$ do đó phương trình EF là $y = (3/4)x$ suy ra $p^*(x) = (3/4)x$ nên
$c = 0$ và $b = -3/4$.

Bài 4

Tìm a, b để $\max\limits_{0 \le x \le 1} |\sqrt{x} - (ax + b)|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải: Cho đường cong $y = \sqrt{x}$ $(ax + b)$ nội tiếp hình
h hành OABC. Để có $ax + b$ xấp xỉ đều tốt nhất trên
$]$ ta chỉ lấy a, b sao cho $y = ax + b$ là phương trình của
ng trung bình EF. Vì khi đó hoành độ của 3 điểm O,
A làm cho hiệu $\sqrt{x} - (ax + b)$ nhận các giá trị $-1/8$,
, $-1/8$. Ta có phương trình của OA là $y = x$ phương
h của CB là $y = x + m$ với điều kiện: $\sqrt{x} = x + m$ tức
$1/4$ và $m = 1/4$. Phương trình của EF là $y = x + 1/8$.
$a = 1$; $b = 1/8$.



Hình 5

Qua các ví dụ trên ta thấy: Định lý Tsê bư sép về xấp xỉ đều tốt nhất cho phép ta giải dễ
g các bài toán min-max của phổ thông. Điều này chứng tỏ việc dạy một số kiến thức có thể
các môn toán cao cấp cho các em học sinh giỏi ở phổ thông là cần thiết, giúp các em suy nghĩ
g tạo hơn trong khi giải toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Phạm Kỳ Anh và nnk. Cơ sở phương pháp tính. Tập I, II. Đại học Tổng hợp Hà nội 1990.

Phan Văn Hạp. Nhân một bài thi vô địch nói chuyện về một loại đa thức. Toán học và Tuổi trẻ, số 86, tháng 9+10, năm 1975.

Математика в школе No 2 , 1984 trang 71, No 4, 1986 trang 61, No 1, 1987 trang 68.

Н. И. Ахиезер. Лекции по аппроксимации. Гостехиздат, 1947.

N. Bakhvalov. Methodes Numeriques. Editions MIR. Moscou 1973.

Hoang Duc Nguyen, Ly Quoc Hao

THE APPLICATIONS OF TSESYSEV'S THEOREM OF BESTLY APPROXIMATION TO SOLVE MIN-MAX PROBLEMS

In this paper we give some applications of bestly approximation theory to solve several schools min-max problems.
The effectives of these methods are demonstrated by interesting examples.

Khoa Toán Cơ Tin học - ĐHTH Hà Nội

TẠP CHÍ KHOA HỌC No 5 - 1991

Lê Văn Vũ, Tạ Đình Cảnh, Nguyễn An,
Đàm Trung Đồn, Phạm Nguyên Hải

CẢM BIẾN NHIỆT ĐIỆN MÀNG MỎNG Bi-Te ỨNG DỤNG LÀM ĐẦU THU BỨC XẠ HỒNG NGOẠI

Cảm biến nhiệt điện màng mỏng Bi-Te được chế tạo bằng phương pháp bốc bay nổ trong chân không có độ nhạy đủ lớn và quán tính nhiệt cỡ 0,5s đã được khảo sát trong khoảng nhiệt độ từ 40°C đến 1000°C.

I. MỞ ĐẦU

Trong kỹ thuật nhiệt thường gặp bài toán xác định từ xa nhiệt độ của một vật thể, ví dụ như nhiệt độ của lò nung xi măng, lò nấu thủy tinh, lò cao tần v.v... Nếu vật cần đo chưa nóng sáng thì các bức xạ nó phát ra chủ yếu là bức xạ hồng ngoại. Với việc sử dụng các đầu thu bức xạ hồng ngoại nhiệt điện, nhiệt độ của vật được xác định trên nguyên tắc đo tổng năng lượng mà vật bức xạ ra dưới dạng tín hiệu điện. Ưu điểm của các đầu thu loại này là có thể ghi nhận bức xạ có công suất nhỏ $10^{-9} \div 10^{-10}$W trong một miền hồng ngoại rộng.

Cảm biến nhiệt điện màng mỏng Bi-Te hoạt động dựa trên cơ sở hiệu ứng Seebeck. Cảm biến này được chế tạo từ các vật liệu siêu sạch có pha tạp bằng phương pháp bốc hay nổ trong chân không (10^{-4}mmHg).

II. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Theo định luật Stefan-Boltzmann thì năng lượng bức xạ hồng ngoại của vật đen tuyệt đối WT được tính bởi công thức: