TẠP CHÍ KHOA HỌC No 1 - 1994

VỀ MỘT LỌC CÁC $Z/p[M(n, Z/p)]$ MÔ ĐUN GỒM CÁC ĐA THỨC THUẦN NHẤT

Tôn Thất Trí
Khoa Toán - ĐHTH Huế

§1. GIỚI THIỆU VÀ PHÁT BIỂU KẾT QUẢ

Đặt $M_n = M(n, Z/p)$ là nửa nhóm các $n \times n$ ma trận hệ số trên trường Z/p gồm p phần tử, p là số nguyên tố. Bài toán xác định các $Z/p[M_n]$ mô đun bất khả quy và phủ xạ ảnh của chúng là bài toán lớn.

Cho M_n tác động lên đại số đa thức n biến theo cách thông thường. Trong [2], bằng cách khảo sát $Z/p[M_2]$ mô đun gồm các đa thức thuần nhất 2 biến, D. J. Glover đã chỉ ra tập đầy đủ các $Z/p[M_2]$ mô đun bất khả quy và chiều phủ xạ ảnh của chúng.

Trong bài báo này, sử dụng các bất biến Dickson và bất biến Mùi chúng tôi cấu tạo một lọc $Z/p[M_n]$ mô đun gồm các đa thức thuần nhất và cho vài tính chất của chúng.

Để phát biểu kết quả ta dùng các kí hiệu sau.

N_i là tập hợp các phần tử của M_n với rank $\leq i$, $1 \leq i \leq n-1$.

$P_n = Z/p[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là đại số đa thức n biến $x_1, \dots, x_n$ hệ số trên Z/p.

$P_n^m = P_n^m(x_1, \dots, x_n)$: các đa thức thuần nhất bậc m. $P_n = \oplus_{m=0}^{m=\infty} P_n^m$. Mỗi P_n^m được xem như là $Z/p[M_n]$ mô đun theo cách thông thường.

Trong mỗi P_n^m, ta ký hiệu linh hóa tử của N_i là $P_n^{m,i}$ với $1 \leq i \leq n-1$: đây là các mô đun con của P_n^m.

D^j: mô đun một chiều, ở đây cho $t \in M_n$ và $d \in D^j$, $t.d = \det(t)^j d$.

Với $n \geq 2$ chúng tôi chứng minh

1.1. Mệnh đề. *Cho $0 \leq m \leq p-1$, các mô đun $P_n^m \otimes D^k$ là bất khả quy tuyệt đối với $k \geq 0$ tùy ý.*

Chúng ta nhắc lại rằng bất biến Dickson $L_i = L_i(x_1, \dots, x_i)$ được định nghĩa bởi

$$L_i = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_i \\ x_1^p & \dots & x_i^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{p^{i-1}} & \dots & x_i^{p^{i-1}} \end{vmatrix}.$$

1.2. Mệnh đề. $\{0\} \leq P_n^{m,n-1} \leq \dots \leq P_n^{m,1} \leq P_n^m$ *và*

$$P_n^{m,i} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{i+1} \leq n} L_{i+1}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{i+1}}) P_n^{m-p^i-\dots-p-1}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

1.3. Mệnh đề. *Cho* $m \geq n(p-1)+1$, *viết* $m = k+j(p-1)$ *với* $(n-1)(p-1)+1 \leq k < n(p-1)+1$. *Khi đó* $P_n^m/P_n^{m,1}$ *đẳng cấu với* $P_n^k/P_n^{k,1}$.

1.4. Mệnh đề. *Cho số nguyên* $m \geq 0$ *khi đó* $P_n^m/P_n^{m,1}$ *là không phân tích được.*

Tôi xin chân thành cảm ơn Giáo sư hướng dẫn Huỳnh Mùi đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành bài báo này. Xin cảm ơn anh Nguyễn Sum về những trao đổi hữu ích.

§2. MỞ ĐẦU

Chúng ta cần các kết quả sau. Trong [1], ch.8, bài tập 1 đã chứng minh

2.1 Mệnh đề. *Đặt* $A = KG$ *ở đây* G *là* p *nhóm với* p *là số nguyên tố và* K *là trường đặc số* p. *Khi đó bất kỳ* A *mô đun* W *bất khả quy đều có chiều bằng một và* G *tác động tầm thường lên chúng.*

Gọi T_n là p nhóm con Sylow của nhóm tuyến tính $GL(n, Z/p)$ gồm các ma trận tam giác trên với 1 trên đường chéo chính. P_n^m là $Z/p[Mn]$ mô đun, P_n^m xem như là $Z/p[T_n]$ mô đun. Nếu $x \in P_n^m$ là T_n bất biến, thì không gian véc tơ một chiều sinh bởi x là $Z/p[T_n]$ mô đun bất khả quy. Trong [3] Huỳnh Mùi đã chứng tỏ

2.2. Mệnh đề.

$$Z/p[x_1, x_2, \dots, x_n]^{T_n} = Z/p[V_1, \dots, V_n],$$

ở đây

$$V_i = V_i(x_1, \dots, x_i n) = \prod_{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1} \in Z/p} (\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + x_i).$$

Cũng trong [3] Mùi đã chứng tỏ $L_i = V_1 \dots V_i$.

§3. CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ 1.1

3.1. Bổ đề. *Cho* $n \geq 2$, $1 \leq m \leq p-1$ *và* U *là* $Z/p[T_n]$ *mô đun con trong* P_n^m. *Giả sử tồn tại các đa thức thuần nhất* $g_i(x_1, \dots, x_{n-1})$ *bậc* $m-i$, $0 \leq i \leq m-1$ *sao cho đa thức* $\sum_{i=0}^{m-1} g_i(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^i + x_n^m \in U$, *thì* $U = P_n^m$.

Chứng minh : Bằng quy nạp theo n. Khi $n = 2$ bổ đề đúng (xem chứng minh của (3.1) trong [2]). Giả sử bổ đề đúng với mọi số nguyên nhỏ hơn n, với $n > 2$ và $1 \leq m \leq p-1$. Do giả thiết tồn tại đa thức $f_0(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{m-1} f_{0,i}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^i + x_n^m \in U$, với $f_{0,i}(x_1, \dots, x_{n-1})$ là các đa thức thuần nhất xác định bậc $m-i$. Lấy

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_n,$$

khi đó $(\sigma - 1).f_0(x_1, \dots, x_n) \in U$ và

$$(\sigma - 1)f_0(x_1,\dots,x_n) = \binom{m}{m-1}\Big(\sum_{i=0}^{m-2} f_{1,i}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^i + x_{n-1}x_n^{m-1}\Big)$$

với $f_{1,i}(x_1,\dots,x_n)$ là các đa thức thuần nhất xác định bậc $m-i$. Đặt

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{m-2} f_{1,i}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^i + x_{n-1}x_n^{m-1}.$$

Lập lại cách làm trên nhiều lần ta có

$$f_0(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=0}^{m-1} f_{0,i}(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^i + x_n^m \in U,$$

$$\vdots$$

$$f_{m-1}(x_1,\dots,x_n) = f_{m-1,0}(x_1,\dots,x_{n-1}) + x_{n-1}^{m-1}x_n \in U,$$
$$f_m(x_1,\dots,x_n) = x_{n-1}^m \in U.$$

Ký hiệu $U_i = \{f(x_1,\dots,x_{n-1}) \in P_{n-1}^i : f(x_1,\dots,x_{n-1})x_n^{m-1} \in U\}$, $1 \le i \le m$. Hiển nhiên U_i là $Z/p[T_{n-1}]$ mô đun con trong P_{n-1}^i. Vì $x_{n-1}^m \in U_m$ và từ giả thiết quy nạp ta có $U_m = P_{n-1}^m$. Lưu ý rằng $U_m \subset U$ nên $P_{n-1}^m \subset U$. Mặt khác $f_{m-1}(x_1,\dots,x_n) \in U$ bao hàm $x_{n-1}^{m-1}x_n \in U$ nên $x_{n-1}^{m-1} \in U_{m-1}$. Do giả thiết quy nạp ta có $U_{m-1} = P_{n-1}^{m-1}$ nên $x_n P_{n-1}^{m-1} \subset U$. Lập lại cách làm trên với $f_i(x_1,\dots,x_n)$, $0 \le i \le m-2$, cuối cùng ta có $x_n^i P_{n-1}^{m-i} \subset U$, $0 \le i \le m$. Do đó $U = P_n^m$ và bổ đề được chứng minh.

3.2. Chứng minh mệnh đề 1.1. Vì $0 \le m \le p-1$, từ mệnh đề 2.1 và mệnh đề 2.2 $P_n^m|_{T_n}$ có duy nhất mô đun con cực tiểu, đó là $\langle x_1\rangle$. Mọi mô đun co không tầm thường của $P_n^m|_{T_n}$ đều chứa x_1^m nhưng do bổ đề 3.1 không có mô đun thực sự nào có thể chứa x_n^m. Lấy

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{nếu } n \text{ là lẻ,} \\ -1, & \text{nếu } n \text{ là chẵn,} \end{cases}$$

khi đó $s \in SL_n$ gồm các $n \times n$ ma trận với định thức bằng 1 và $s.(x_1^m) = x_n^m$, vì thế không có mô đun con nào của $P_n^m|_{SL_n}$ có thể chứa x_1^m mà không chứa x_n^m, do đó $P_n^m|_{SL_n}$ không có mô đun con thực sự khác không.

Nếu chúng ta mở rộng trường hệ số, cùng cách trên được áp dụng, nên $P_n^m|_{SL_n}$ là bất khả quy tuyệt đối. Vì $(P_n^m \otimes D^k)|_{SL_n}$, các khẳng định khác của mệnh đề 1.1 là hiển nhiên.

§4. CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ 1.2

Vì $N_1 \subset \dots \subset N_{n-1}$ nên $\{0\} \le P_n^{m,n-1} \le \dots \le P_n^m$ là hiển nhiên.

Đặt $P_n^{m,i} = \sum_{1 \le j_1 \le \dots \le j_{i+1} \le n} L_{i+1}(x_{j_1},\dots,x_{j_{i+1}})P_n^{m-p^i-\dots-p-1}$.

Cho $\sigma = (\sigma_{k\ell} \in N_i$ và $1 \le j_1 < \dots < j_{i+1} \le n$, Khi đó

$$\sigma.L_{i+1}(x_{j_1},\dots,x_{j_{i+1}}) = L_{i+1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{kj_1}x_k,\dots,\sum_{k=1}^{n}\sigma_{kj_{i+1}}x_k\Big).$$

Vì rank $\sigma \le i$ nên tồn tại $i_0 \in \{1,\dots,i+1\}$ sao cho cột thứ j_{i_0} của ma trận σ là tổ hợp các cột khác. Nói cách khác tồn tại $\beta_\ell \in Z/p$, $1 \le \ell \le i+1$, $\ell \ne i_0$ sao cho $\sigma_{kj_{i_0}} = \sum_{1\le\ell\le i+1,\ell\ne i_0}\beta_\ell\sigma_{kj_\ell}$, với $1 \le k \le n$. Vì

$$\sigma.L_{i+1}(x_{j_1},\dots,x_{j_{i+1}}) =$$
$$\sum_{1\le\ell\le i+1,\ell\ne i_0} L_{i+1}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sigma_{kj_1}x_k,\dots,\sum_{k=1}^{n}\beta_\ell\sigma_{kj_\ell}x_k,\dots,\sum_{k=1}^{n}\sigma_{kj_{i+1}}x_k\Big) = 0,$$

do đó bao hàm $P_n^{m,i} \le P_n^{m,i}$ là hiển nhiên. Bao hàm ngược lại sẽ được chứng minh như sau

Trước hết ta chứng tỏ $P_n^{m,n-1} \ge P_n^{m,n-1}$. Cho $f(x_1,\dots,x_n) \in P_n^{m,n-1}$, với mỗi k, $1 \le k \le n$ và $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1} \in Z/p$, viết

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &= (\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}+x_k)g(x_1,\dots,x_n)\\ &\quad + h(x_1,\dots,x_{k-1},\hat{x}_k,x_{k+1},\dots,x_n). \end{aligned}$$

Lấy

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & -\alpha_1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & -\alpha_{k-1} & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$-\alpha_1,\dots,-\alpha_k$ ở trên cột thứ k. Khi đó $\sigma \in N_{n-1}$ và $\sigma.f(x_1,\dots,x_n) = 0$ bao hàm $h(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n) = 0$. Do đó $f(x_1,\dots,x_n)$ có $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}+x_k$ như nhân tử nên có V_k như nhân tử. Vì vậy, $f(x_1,\dots,x_n)$ chứa $L_n(x_1,\dots,x_n)$ như nhân tử. Nói cách khác $f(x_1,\dots,x_n) \in P_n^{m,n-1}$. Từ đây khẳng định trên là hiển nhiên.

Cho $1 \le i \le n-2$, ta chứng minh $P_n^{m,i} \ge P_n^{m,i}$ bằng quy nạp theo n. Giả sử với mọi số nguyên nhỏ hơn n mệnh đề đúng. Cho $f(x_1,\dots,x_n) \in P_n^{m,i}$, $1 \le i \le n-2$, ta viết $f(x_1,\dots,x_n) = x_1g(x_1,\dots,x_n)+h(x_1,\dots,x_n)$. Cho $\sigma \in M_{n-1}$ sao cho rank $\sigma \le i$, σ xem như là phần tử $\sigma' \in M_n$ bằng cách cho hàng thứ 1 và cột thứ 1 bằng 0. Khi đó rank σ' = rank $\sigma \le i$, và $\sigma'.f(x_1,\dots,x_n) = 0$ bao hàm $\sigma.h(x_2,\dots,x_n) = 0$. Do đó $h(x_2,\dots,x_n) \in P_{n-1}^{m,i}(x_2,\dots,x_n)$. Bởi giả thiết quy nạp

$$P_{n-1}^{m,i}(x_2,\dots,x_n) = \overline{P}_{n-1}^{m,i}(x_2,\dots,x_n) \le P_n^{m,i}$$

nên $f(x_1,\dots,x_n) = x_1g(x_1,\dots,x_n) \bmod \overline{P}_n^{m,i}$. Giả sử

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})\in U\le(Z/p)^{k-1}} &(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{k-1}x_{k-1}+x_k)\times\\ &V_1\dots V_{k-1}s(x_1,\dots,x_n) \bmod P_n^{m,i}, \end{aligned}$$

với $k-1 < i+1$ và tập hợp con U xác định trong $(Z/p)^{k-1}$. Cho $(\beta_1,\ldots,\beta_{k-1}) \notin U$, viết $s(x_1,\ldots,x_n) = (\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{k-1}x_{k-1} + x_k)s'(x_1,\ldots,x_n) + r(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)$ và

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \Big[\prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})\in U\cup\{(\beta_1,\ldots,\beta_{k-1})\}} (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + x_k)s'(x_1,\ldots,x_n) +$$
$$\prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})\in U} (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + x_k)r(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)\Big] \times V_1\ldots V_{k-1} \bmod P_n^{m,i}.$$

Lấy

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & -\beta_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & -\beta_{k-1} & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in GL(n, Z/p),$$

$-\beta_1,\ldots,-\beta_{k-1}$ ở trên cột thứ k

$$\sigma_0.f(x_1,\ldots,x_n) = \Big[x_k \prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})\in U'-\{(0,\ldots,0)\}} (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + x_k)s''(x_1,\ldots,x_n) +$$
$$\prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})\in U'-\{(0,\ldots,0)\}} (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + x_k)r(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)\Big] \times$$
$$V_1\ldots V_{k-1} \bmod \overline{P}_n^{m,i},$$

với tập con U' xác định trong $(Z/p)^{k-1}$. Cho $\sigma \in M_{n-1}$ sao cho rank $\sigma \leq i$, σ được xem như là phần tử $\sigma' \in M_n$ bằng cách cho hàng thứ k và cột thứ k bằng 0. Rank σ' = rank $\sigma \leq i$ và $\sigma'.\sigma_0 f(x_1,\ldots,x_n) = 0$ bao hàm $\sigma.(V_1\ldots V_{k-1}r(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)) = 0$. Do đó $V_1\ldots V_{k-1}r(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n) \in P_{n-1}^{m,i}(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n)$. Do giả thiết quy nạp $P_{n-1}^{m,i}(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n) = \overline{P}_{n-1}^{m,i}(x_1,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_n) \leq \overline{P}_n^{m,i}$ nên

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1})\in U\cup\{(\beta_1,\ldots,\beta_{k-1})\}} (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k-1}x_{k-1} + x_k)\times$$
$$V_1\ldots V_{k-1}s'(x_1,\ldots,x_n) \bmod \overline{P}_n^{m,i}.$$

Bằng quy nạp ta suy ra $f(x_1,\ldots,x_n) = V_1\ldots V_{i+1}f'(x_1,\ldots,x_n) \bmod \overline{P}_n^{m,i}$, với $f'(x_1,\ldots,x_n)$ là đa thức xác định trong $P_n^{m-p^i-\cdots-p-1}$. Nói cách khác $f(x_1,\ldots,x_n) \in \overline{P}_n^{m,i}$ và mệnh đề 1.2 được chứng minh.

§5. CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ 1.3

5.1 Bổ đề. *Cho $m \geq (n-1)(p-1)+1$, mô đun $P_n^{m,1}$ có đối chiều bằng $p^{n-1} + \cdots + p + 1$ trong P_n^m.*

Chứng minh: Đặt U là không gian con của P_n^m, U được sinh bởi

$$\left\{x_{i_1}^{j_1}, \dots, x_{i_k}^{j_k} : 1 \le j_1, \dots, j_{k-1} \le p-1,\ j_1 + \dots + j_k = m,\ 1 \le i_1 < \dots < i_k \le n\right\}.$$

U có chiều bằng ℓ, ở đây

$$\ell = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}(p-1) + \dots + \binom{n}{n}(p-1)^{n-1},$$
$$\ell = p^{n-1} + \dots + p + 1.$$

Cho $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n^m$, viết

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{n} x_1^i x_j g_{ij}(x_2, \dots, x_n) + s(x_2, \dots, x_n) + \alpha x_1^m,$$

với $g_{ij}(x_2, \dots, x_n)$, $s(x_2, \dots, x_n)$ là các đa thức xác định và $\alpha \in Z/p$. Với mỗi hạng $x_1^i x_j g_{ij}(x_2, \dots, x_n)$, viết

$$x_1^i x_j g_{ij}(x_2, \dots, x_n) = (x_1^p x_j - x_1 x_j^p) h_{ij}(x_1, \dots, x_n) + r_{ij}(x_1, \dots, x_n),$$

với $h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$, $r_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ là các đa thức xác định và bậc của $r_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ theo x $p-1$. Do đó

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} (x_1^p x_j - x_1 x_j^p) f_{1,j}(x_1, \dots, x_n) + r_1(x_1, \dots, x_n) + \alpha x_1^m,$$

với $f_{1,j}(x_1, \dots, x_n)$, $r_1(x_1, \dots, x_n)$ là các đa thức xác định và bậc của $r_1(x_1, \dots, x_n)$ theo $x_1 \le p$
Lặp lại cách trên nhiều lần cuối cùng ta có:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} (x_i^p x_j - x_i x_j^p) f_{i,j}(x_1, \dots, x_n) + r(x_1, \dots, x_n),$$

ở đây $r(x_1, \dots, x_n)$ là đa thức xác định gồm các đơn thức trong U. Do đó $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n^{m,1}$
Bổ đề sẽ được chứng minh nếu có $U \cap P_n^{m,1} = \{0\}$. Để có điều này, cho $f(x_1, \dots, x_n) \in U \cap P$, viết

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{1 < i_1 < \dots < i_n < \\ 1 \le j_1, \dots, j_{k-1} \le}} \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{k-1}} x_{i_1}^{j_1} \dots x_{i_{k-1}}^{j_{k-1}} x_{i_k}^{m - j_1 - \dots - j_{k-1}}.$$

với mỗi $(i_1, \dots, i_k)$ sao cho $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$ và ma trận tùy ý σ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \beta_1 & \dots & \beta_k & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \beta_1 & \dots & \beta_k & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$\beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in Z/p - \{0\}$, $\beta_k = 1$ và β_j ở trên cột thứ i_j, vì rank $\sigma = 1$ nên $\sigma f(x_1, \dots, x_n)$
Điều này bao hàm $\sum_{1 \le j_1, \dots, j_{k-1} \le p-1} \alpha_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{k-1}} \beta_1^{j_1} \dots \beta_{k-1}^{j_{k-1}} = 0$, với $\beta_1, \dots, \beta_{k-1} \in Z/p -$
Vì

$$\det(\beta_1^{j_1}\dots\beta_{k-1}^{j_{k-1}}) = \prod_{i=1}^{k-1}\det(\beta_i^{j_i}) = \prod_{1\le h<\ell\le p-1}(\ell-h)\ne 0 \bmod p,$$

n hệ phương trình trên có lời giải tầm thường duy nhất $\alpha_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{k-1}} = 0$ với $1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le$ - 1. Điều này bao hàm $f(x_1,\dots,x_n)=0$. Do đó $U\cap P_n^{m,1}=\{0\}$ và bổ đề được chứng minh.

2. Chứng minh mệnh đề 1.3

Cơ sở tiêu chuẩn cho P_n^k là $\{x_1^{j_1}\dots x_n^{j_n} : j_1+\dots+j_n=k,\ j_1,\dots,j_n\ge 0\}$. Định nghĩa : $P_n^k\to P_n^m$ trên các véc tơ cơ sở này bởi $\Psi(x_1^{j_1}\dots x_n^{j_n}) = x_1^{j_1}\dots x_\ell^{j_\ell}x_\ell^{m-k}$, ở đây ℓ là số nguyên nhất trong $\{1,\dots,n\}$ sao cho $j_\ell\ne 0$ và mở rộng tới $P-n^k$ bởi tính tuyến tính. Với mỗi $(x_i^p x_j - x_i x_j^p)f(x_1,\dots,x_n)\in P_n^{k,\ell}$ thì $\psi((x_i^p x_j - x_i x_j^p)f(x_1,\dots,x_n)) = (x_i^p x_j - x_i x_j^p)g(x_1,\dots,x_n)$ i $g(x_1,\dots,x_n)$ là đa thức xác định. Do đó $\Psi(P_n^{k,1})\le P_n^{m,1}$. Mệnh đề sẽ được chứng minh ng cách chứng tỏ $\Psi(\sigma.u)-\sigma.\Psi(u)\in P_n^{m,1}$ với $u\in P_n^k$, $\sigma\in Z/p[M_n]$. Điều này sẽ chứng tỏ ng Ψ hợp với ánh xạ chính tắc η từ P_n^m lên $P_n^m/P_n^{m,1}$ là một $Z/p[M_n]$ đồng cấu, như chúng ta ú ý ở trên P_n^{k-1} ở trong hạt nhân của $\eta\Psi$, ánh xạ này cảm sinh một đồng cấu từ $P_n^k/P_n^{k,1}$ vào $^m/P_n^{m,1}$. Đồng cấu này là lên $P_n^m/P_n^{m,1}$ vì như chúng ta thấy trong bổ đề 5.1 $P_n^m/P_n^{m,1}$ có cơ

$$\left\{\left(x_{i_1}^{j_1}\dots x_{i_n}^{J_n}\right)+P_n^{m,1} : 1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le p-1,\ j_1+\dots+j_h=m,\ 1\le i_1<\dots<i_h\le n\right\}$$

cơ sở này là ảnh bởi $\eta\Psi$ của

$$\left\{\left(x_{i_1}^{j_1}\dots x_{i_h}^{j_h}\right) : 1\le j_1,\dots,j_{h-1}\le p-1,\ j_1+\dots+j_h=k,\ 1\le i_1<\dots<i_h\le n\right\}.$$

đó bổ đề 5.1 chứng tỏ rằng ta có một đẳng cấu.

Bằng tính toán trực tiếp ta dễ dàng thu được $\Psi(\sigma.u)-\sigma.\Psi(u)\in P_n^{m,1}$. Điều này hoàn thành ng minh của mệnh đề 1.3.

§6. CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ 1.4

Đặt X_n^m là không gian được sinh bởi

$$\left\{(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_{i-1}x_{i-1}+x_i)^m : \alpha_j\in Z/p,\ 1\le j\le i-1,\ 1\le i\le n\right\},$$

X_n^m có chiều tối đa là $p^{n-1}+\dots+p+1$.

Lưu ý rằng do mệnh đề 1.1, $X_n^m=P_n^m$ khi $0\le m\le p-1$. Đặt $\overline{X_n^m}=X_n^m\cap P_n^{m,1}$.

Bổ đề. *Cho $m\ge p$, viết $m=r(p-1)+k$ với $1\le k\le p-1$. Khi đó $X_n^m/\overline{X_n^m}$ đẳng cấu với*

ng minh: Cùng phương pháp như chứng minh (4.5) trong [2], ở đây ta chỉ phác họa những i cương của phép chứng minh. Đặt X là Z/p không gian véc tơ có chiều $P^{n-1}+\dots+p+1$ sở $\{x_{\alpha_1,\dots\alpha_{i-1},i} : 1\le j\le i-1,\ 1\le i\le n,\ \alpha_i\in Z/p\}$.

Cho $\ell=k, m$, ta định nghĩa các Z/p ánh xạ tuyến tính ρ_ℓ của X lên X_n^ℓ bởi

$$\rho_\ell(x_{\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},i}) = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + x_i)^\ell.$$

Như trong chứng minh của (4.5) trong [2], ta định nghĩa một M_n tác động lên X sao cho ρ_ℓ là $Z/p[M_n]$ đồng cấu.

Chú ý rằng $\rho_m(\ker\rho_k) \le \overline{X}_n^m$. Bây giờ định nghĩa một đồng cấu từ P_n^k vào $X_n^m/\overline{X}_n^m$ bằng cách với mỗi $u \in P_n^k$ chọn một ảnh ngược x trong X bởi ρ_k và khi đó ánh xạ biến u thành $\rho_m x + \overline{X}_n^m$. Vì $\rho_m(\ker\rho_k) \le \overline{X}_n^m$ nên ánh xạ này được định nghĩa đúng đắn, nó là một $Z/p[M_n]$ đẳng cấu và bổ đề được chứng minh.

6.2 Chứng minh mệnh đề 1.4 : Từ bổ đề 6.1 $(X_n^m + P_n^{m,1})/P_n^{m,1} \cong X_n^m/\overline{X}_n^m$ là bất khả quy. Cùng phương pháp như chứng minh của (4.6) trong [2], ta chứng tỏ rằng $P_n^m/P_n^{m,1}$ có duy nhất mô đun con cực tiểu cụ thể là $(X_n^m + P_n^{m,1})/P_n^{m,1}$. Từ đây suy ra $P_n^m/P_n^{m,1}$ là không phân tích được và mệnh đề 1.4 được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. C. W. Curtis and I. Reiner, "Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras' Interscience, New York 1962.
2. D. J. Glover, A Study of Certain Modular Representations, Journal of Algebra **51**, (1978), 425 475.
3. Huỳnh Mùi, Modular invariant theory and the cohomology algebras of symmetric groups, J. Fac Sci. univ. Tokyo Sec. IA Math. **22**, (1975) 319 - 169.

ON A FILTRATION OF $Z/p[M(n, Z/p)]$ MODULES OF ALL HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

Ton That Tri

Let p be prime number, $M_n = M(n, Z/p)$ the semigroup of all $n \times n$ matrices over field Z/p p elements. M_n acts on the commutative polynomial algebra in n indeterminants in the usual wa By using Dickson's invariants and Mui's invariants we construct a filtration of $Z/p[M_n]$ modul of all homogeneous polynomials and give some properties of them.