TẠP CHÍ KHOA HỌC No 1 - 199

Phan Văn Hạp
Lê Đình Định

ĐẠO HÀM TRUNG BÌNH VỚI CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ GIÁN ĐOẠN

1. MỞ ĐẦU

Người ta đã biết nhiều đến các phương pháp xây dựng phương trình sai phân cho các bài toán vật lý được mô tả bởi phương trình có các hệ số đủ trơn và thu được độ chính xác cao của nghiệm. Tuy nhiên lớp các bài toán có các hệ số trơn chưa đủ rộng, bởi vậy các phương pháp xây dựng phương trình sai phân cho phương trình có hệ số gián đoạn đang được quan tâm nhiều.

Trong bài này chúng tôi đưa ra phương pháp xây dựng phương trình sai phân cho phương trình khuyếch tán có hệ số gián đoạn dựa theo nguyên lý biến phân và đạo hàm trung bình (tích phân) [1].

2. BÀI TOÁN KHUYẾCH TÁN MỘT CHIỀU DẠNG ĐƠN GIẢN

Xét phương trình:

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right) + q\varphi = f \qquad 0 \le x \le 1 \tag{2.1}$$

trong đó $p = p(x) > 0$, $q = q(x) > 0$, $f = f(x)$, $\varphi = \varphi(x)$ là các hàm liên tục và trơn từng khúc trên $[0, 1]$, ngoài ra giả thiết $p'(x)$, $q'(x)$, $\varphi'(x)$ tồn tại (theo nghĩa đạo hàm trung bình) và giới nội.

Điều kiện biên của (2.1) có dạng:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \tag{2.2}$$

Trên đoạn $[0, 1]$ ta xét hai hệ điểm lưới $\{x_k\}$, $\{x_{k+1/2}\}$ $k = 0, 1, \ldots$ thỏa mãn:

$$x_{k+1/2} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}, \quad 0 < x_{1/2} < x_1 < x_{3/2} < \cdots < x_{n-1/2} < x_n = 1.$$

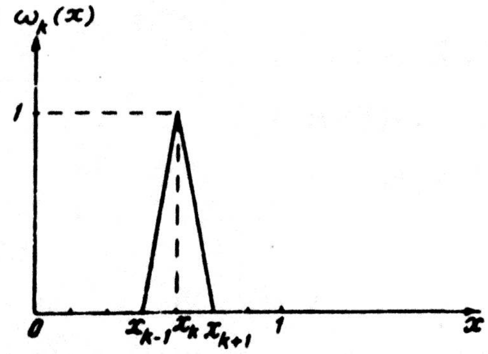
Xét các hàm:

$$\begin{aligned} \omega_1^k(x) &= \frac{x - x_{k-1}}{\Delta_{k-1/2}}, \quad \omega_2^k = \frac{x_{k+1} - x}{\Delta_{k+1/2}}, \\ \Delta_{k-1/2} &= \frac{x_k - x_{k-1}}{2}, \quad \Delta_{k+1/2} = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Và hệ cơ sở $\{\omega_k(x),\ k = \overline{1, n-1}\}$ có dạng:

$$\omega_k(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \\ \omega_1^k(x) & x_{k-1} \le x \le x_k \\ \omega_2^k(x) & x_k \le x \le x_{k+1} \end{cases} \tag{2.4}$$

Đồ thị của $\omega_k(x)$ có dạng:



Đạo hàm trung bình của $\omega_k(x)$ như sau:

$$\omega_k'(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}],\ x = x_k \\ \dfrac{1}{2\Delta_{k-1/2}} & x = x_{k-1} \\ \dfrac{1}{\Delta_{k-1/2}} & x_{k-1} < x < x_k \\ -\dfrac{1}{\Delta_{k+1/2}} & x_k < x < x_{k+1} \\ \dfrac{1}{2\Delta_{k+1/2}} & x = x_{k+1} \end{cases} \tag{2.5}$$

Xét tích vô hướng:

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)\, g(x) dx \tag{2.6}$$

Thế thì

$$(\omega_k(x), \omega_\ell(x)) = \begin{cases} 0 & \ell \le k-2,\ \ell > k+2 \\ \dfrac{1}{6}\Delta_{k-1/2} & \ell = k-1 \\ \dfrac{1}{3}\Delta_k & \ell = k \\ \dfrac{1}{6}\Delta_{k+1/2} & \ell = k+1 \end{cases} \tag{2.7}$$

trong đó $\Delta_k = x_{k+1} - x_{k-1} = \Delta_{k+1/2} + \Delta_{k-1/2}$

Từ (2.7) suy ra $\omega_k(x)$ trực giao với tất cả các hàm $\omega_\ell(x)$ trừ ra ba hàm $\omega_{k-1}(x)$, $\omega_k(x)$, $\omega_{k+1}(x)$.

Bây giờ ta xây dựng phương trình sai phân cho (2.1) nhờ hệ hàm cơ sở $\{\omega_k(x),\ k = \overline{1, n-1}\}$.

Nhân vô hướng hai vế của (2.1) với $\omega_k(x)$ ta được:

$$\int_0^1 \left[-\frac{d}{dx}p\frac{d\varphi}{dx}+q\varphi\right]\omega_k(x)dx=\int_0^1 f\,\omega_k(x)dx \tag{2.8}$$

hai lần tích phân từng phần (2.8) ta được:

$$-\frac{p_{k+1}\varphi_{k+1}}{2\Delta_{k+1/2}}-\frac{p_{k-1}\varphi_{k-1}}{2\Delta_{k-1/2}}-\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\left[p'\omega_k'(x)-q\omega_k\right]\varphi dx=\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f\,\omega_k(x)dx$$

trong đó $p_i := p(x_i)$, $\varphi_i := \varphi(x_i)$

Xét toán tử A được xác định bởi hệ thức:

$$(A\varphi)_k=-\frac{1}{\Delta_k}\left\{\frac{p_{k+1}\varphi_{k+1}}{2\delta_{k+1/2}}+\frac{p_{k-1}\varphi_{k-1}}{2\Delta_{k-1/2}}+\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}}\left[p'\omega_k'(x)-q\omega_k(x)\right]\varphi dx\right\} \tag{2.9}$$

trong đó $\varphi \in \Phi$ - lớp nghiệm của (2.1).

Vectơ F với các thành phần:

$$(f)_k=\frac{1}{\Delta_k}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f\,\omega_k(x)dx \tag{2.10}$$

Sau khi hợp các hệ thức (2.9) ($k=\overline{1,n-1}$) ta được hệ

$$A\varphi = F \tag{2.11}$$

Bây giờ ta xét các xấp xỉ khác nhau của (2.11).

Gọi Φ_h là không gian các hàm lưới φ^h dạng:

$$\varphi^h=(\varphi_1^h,\varphi_2^h,\ldots,\varphi_{n-1}^h)$$

với chuẩn

$$\|\varphi^h\|_{\Phi_h}^2=\sum_{j=1}^{n-1}\Delta_j(\varphi_j^h)^2 \tag{2.12}$$

Xét bài toán xấp xỉ:

$$A^h\varphi^h=f^h \tag{2.13}$$

Trong đó

$$\begin{aligned}(A^h\varphi^h)_k&=-\frac{1}{\Delta_k}\left\{p_{k+1}\frac{\varphi_{k+1}^h-\varphi_k^h}{2\Delta_{k+1/2}}-p_{k-1}\frac{\varphi_k^h-\varphi_k^h}{2\Delta_{k-1/2}}-\frac{\Delta_k q_k}{2}\varphi_k^h\right\}\\(f^h)_k&=\frac{1}{2}f_k=\frac{1}{2}f(x_k)\end{aligned} \tag{2.14}$$

Để ý rằng (2.13) là hệ phương trình có A^h là ma trận ba đường chéo chính. Giải (2.13) ta được nghiệm φ^h. Khi đó nghiệm của (2.1) được xác định bởi:

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n-2} \varphi_j^h \omega_j(x) \tag{2.15}$$

Sự hội tụ của nghiệm φ^h về nghiệm φ của phương trình (2.1) được thể hiện bởi định lý sau:

Định lý 1: Nghiệm của (2.13) hội tụ về nghiệm φ của (2.1) với tốc độ hội tụ 1/2.

Chứng minh: Ta có:

$$\|A^h(\varphi)_h - f^h\|_{F^h} \le \|\xi^h\|_{F_h} + \|\eta^h\|_{F_h} + \|\chi^h\|_{F^h} \tag{2.16}$$

trong đó:

$$(\xi^h)_h = \frac{1}{\Delta_h}\left\{\int_{x_{h-1}}^{x_{h+1}} p'\omega_h'(x)\varphi dx + \left[\frac{p_{k+2}}{2\Delta_{k+1/2}} + \frac{p_{k-1}}{2\Delta_{k-1/2}}\right]\varphi_k\right\}$$

$$(\eta^h)_h = -\frac{1}{\Delta_k}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} q\omega_k(x)\varphi dx - \frac{\Delta_k q_k}{2}\varphi_k\right\}$$

$$(\chi^h)_h = \frac{1}{\Delta_k}\left\{\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f\omega_k dx - \frac{1}{2}f_k\Delta_k\right\}$$

Đặt $h = \max_k |x_{k+1} - x_k|$. Ta có:

$$\begin{aligned} \|\xi^h\|_{F^h} &\le M \cdot h^{1/2} \\ \|\eta^h\|_{F^h} &\le N \cdot h^{3/2} \\ \|\chi^h\|_{F^h} &\le K \cdot h^{3/2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

từ (2.16), (2.17) ta được:

$$\|A^h(\varphi)_h - f^h\|_{F^h} \le Mh^{1/2} + Nh^{3/2} + Kh^{3/2} \le C \cdot h^{1/2}$$

Trong đó M, N, K, C là các hằng số không phụ thuộc h.

Vậy lược đồ sai phân (2.13) có cấp xấp xỉ là 1/2.

Ta chuyển qua đánh giá sự ổn định của (2.13)

Ta có:

$$\begin{aligned}(\varphi^h, f^h) = (\varphi^h, a^h\varphi^h) &= \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k\varphi_k^h\Big\{-\frac{1}{\Delta_k}\Big[\frac{p_{k+1}}{2\Delta_{k+1/2}}(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) - \\ &\quad - \frac{p_{k-1}}{2\Delta_{k-1/2}}(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - \frac{1}{2}\Delta_k q_k\varphi_k\Big]\Big\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_{k-1}}{2\Delta_{k-1/2}}\varphi_k^h(\varphi_k^h - \varphi_{k-1}^h) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{p_{k+1}}{2\Delta_{k+1/2}}\varphi_k^h(\varphi_{k+1}^h - \varphi_k^h) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\Delta_k q_k\varphi_k^2 \ge\end{aligned}$$

$$\geq p_0\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varphi_k^h(\varphi_k^h-\varphi_{k-1}^h)}{2\Delta_{k-1/2}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varphi_k^h(\varphi_{k+1}^h-\varphi_k^h)}{2\Delta_{k+1/2}}\Big]=$$

$$=p_0\Big[\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(\varphi_k^h-\varphi_{k-1}^h)(\varphi_k^h-\varphi_{k-1}^h)}{2\Delta_{k-1/2}}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi_{k-1}^h(\varphi_k^h-\varphi_{k-1}^h)}{2\Delta_{k-1/2}}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi_k^h(\varphi_{k+1}^h-\varphi_k^h)}{2\Delta_{k+1/2}}\Big]=$$

$$=p_0\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\varphi_k^h-\varphi_{k-1}^h)^2}{2\Delta_{k-1/2}}+\frac{\varphi_0(\varphi_1^h-\varphi_0^h)}{2\Delta_{1/2}}\quad\frac{\varphi_{n-2}^h(\varphi_n^h-\varphi_{n-1}^h)}{2\Delta_{n-1/2}}\geq p_0\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\varphi_k^h-\varphi_{k-1}^h)^2}{2\Delta_{k-1/2}}$$

mặt khác:

$$(\varphi_k^h)^2=\Big[\sum_{j=1}^{k}(\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h)\Big]^2=\Big[\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h}{\sqrt{\Delta_{j-1/2}}}\sqrt{\Delta_{j-1/2}}\Big]^2\leq$$

$$\leq\Big(\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h}{\delta_{j-1/2}}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k}\delta_{j-1/2}\Big)\leq$$

$$\leq\sum_{j=1}^{k}\frac{(\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h)^2}{\Delta_{j-1/2}}\leq\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h)^2}{\Delta_{j-1/2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n-1}(\varphi_k^h)^2<\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\Delta_k\sum_{j=1}^{k}\frac{(\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h)^2}{\delta_{j-1/2}}\Big]\leq$$

$$\leq\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\Delta_k\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h)^2}{\Delta_{j-1/2}}\Big)\leq\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(\varphi_j^h-\varphi_{j-1}^h)^2}{\delta_{j-1/2}}\leq\frac{2}{p_0}(\varphi^h,f^h)$$

$$\|\varphi^h\|_{F^h}^2\leq\frac{2}{p_0}(\varphi^h,f^h)\leq\frac{2}{p_0}\|\varphi^h\|_{F^h}\;\|f^h\|_{F^h}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|\varphi^h\|_{F^h}\leq\frac{2}{p_0}\|f^h\|_{F^h}$$

Từ đó suy ra lược đồ (2.13) ổn định

Vậy ta có ước lượng:

$$\|(\varphi)_h-\varphi^h\|\leq C\,h^{1/2}\tag{2.18}$$

Định lý được chứng minh.

Nhận xét: Để được cấp hội tụ cao hơn ta có thể sử dụng phương pháp Risacxơn hoặc tăng độ trơn của nghiệm, hoặc có thể xét lưới tựa đều.

Xét trên lớp nghiệm không tăng của phương trình (2.1) (tức là giả thiết nghiệm $\varphi(x)$ không tăng), ta có kết quả:

Định lý 2: **Nghiệm** φ^h của phương trình sai phân (2.13) hội tụ về nghiệm φ **của (2.1) với tốc độ hội tụ bằng 1.**

Việc chứng minh định lý này hoàn toàn giống việc chứng minh định lý 1, chỉ khác là chuẩn được chọn:

$$\|\varphi^h\|^2_{F^h} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \Delta_\ell \sum_{j=1}^{\ell} \Delta_j (\varphi^h_j)^2$$

...t lượ... ...ác của (2.1) như sau:

$$(a^h\varphi^h)_h = -\frac{1}{\Delta_i}\left\{\frac{p_{k+1}\varphi_{k+1}}{2\Delta_{k+1/2}} + \frac{p_{k-1}\varphi_{k-1}}{2\Delta_{k-1/2}} + \right.$$

$$\left. + \left[p'_{k-1/2} - p'_{k+1/2} - \frac{1}{2}\Delta_k q_k\right]\varphi_k\right\} \tag{2.19}$$

$$(f^h)_h = \frac{1}{2}f_h = \frac{1}{2}f(x_k)$$

trong đó $p'_{k-1/2} = p'(x_{k-1/2})$; $p'_{k+1/2} = p'(x_{k+1/2})$.

Các kết quả thu được ở lược đồ (2.13) cũng đúng cho (2.19)

3. PHƯƠNG TRÌNH KHUYẾCH TÁN MỘT CHIỀU DẠNG TỔNG QUÁT

Xét phương trình

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) + r(x)\frac{d\varphi}{dx} + q(x)\varphi = f \qquad 0 \le x \le 1 \tag{3.1}$$

Với các điều kiện biên:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \tag{3.2}$$

Trong đó $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ là các hàm gián đoạn loại 1.

Nghiệm $\varphi(x)$ có bậc m trên mỗi đoạn lưới $[x_k, x_{k+1}]$.

Từ lý thuyết xấp xỉ ta xây dựng hàm $g_k(x)$ là đa thức bậc m trên $[x_k, x_{k+1}]$ đi qua $(m+1)$ điểm $x_k = x_k^0, x_k^1, \ldots, x_k^{m+1} = x_{k+1}$ là đa thức xấp xỉ của $\varphi(x)$ ($g_k(x)$ tồn tại duy nhất). $g_k(x)$ chính là đa thức Lagrăng được tính theo công thức:

$$g_k(x) = \sum_{i=0}^{m} d_{m,i} \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq i}} \frac{x_{k,\ell} - x}{x_{k,\ell} - x_{k,i}} \tag{3.3}$$

Chọn $\{g_k(x)\}$ làm hệ hàm cơ sở để xây dựng các phương trình sai phân (3.1) theo các bước đã làm trong §2.

Ta cũng có thể sử dụng hệ hàm cơ sở lượng giác như sau:

Trên mỗi đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ta xấp xỉ nghiệm bằng đa thức:

$$\varphi N_i(x) = \sum_{k=0}^{2N_i} c_k^i \omega_k^i(x); \quad i = 0, 1, \ldots, m \tag{3.4}$$

Trong đó:

$$\omega^i_{2k-1}(x) = \sin\frac{k\pi(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$
$$\omega^i_{2k}(x) = \cos\frac{k\pi(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{3.5}$$

Mỗi hàm $\omega^i_k(x)$ có thể xem như đã xác định trên đoạn $[0, 1]$

$$\omega^i_k(x) = \begin{cases} (3.5) & \text{nếu } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{3.6}$$

Khi đó nghiệm gần đúng của (3.1) được tìm dưới dạng:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{2N_i} C^i_k\omega^i_k(x) \qquad 0 \le x \le 1 \tag{3.7}$$

Khi đó ta có ước lượng:

$$\|\varphi(x) - \varphi_0(x)\|_{L_2[0,1]} \le \text{const}\,\frac{\ln N}{N^{\nu-1}} \tag{3.8}$$

trong đó:

$$N = \min N_i \tag{3.9}$$

Các hàm cơ sở trên là các thí dụ minh họa cho nhiều khả năng trong thực hành của các phương pháp sai biến phân để giải các bài toán vật lý toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phan Văn Hạp, Lê Đình Định. Đạo hàm trung bình và ứng dụng của nó, Tóm tắt báo cáo "Hội nghị toán học toàn quốc lần thứ IV, Hà Nội 10/1990".
2. Lê Đình Định. Ứng dụng của đạo hàm trung bình trong các bài toán biên có nghiệm không trơn, Tóm tắt báo cáo "Hội nghị toán học toàn quốc lần thứ IV, Hà Nội 10/1990".
3. Mactruc G. I. Các phương pháp toán học tính toán (hai tập). Phan Văn Hạp, Lê Đình Thịnh (dịch), NXB ĐHTHCN, Hà Nội 1984.

Phan Van Hap, Le Dinh Dinh

AVARAGE DERIVATIVES AND
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH
DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

This paper deals with a finite-difference method using avarage derivatives for solving differential equation with discontinuous coefficients.

Khoa Toán - Cơ - Tin học - ĐHTH Hà Nội