TẠP CHÍ KHOA HỌC No 1 - 1992

Phạm Quang Hưng

CÔNG THỨC NỘI SUY NEWTON-LAGRANGE ĐỐI VỚI TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI

Các bài toán nội suy cổ điển đã được nhiều nhà toán học nổi tiếng nghiên cứu, như Lagrange, Newton, Hermite... Tuy nhiên, cho đến nay, bài toán nội suy tổng quát vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn (xem [1] - [5]). Bài toán nội suy tổng quát đối với lớp toán tử khả nghịch phải đã được Przeworska-Rolewicz [1] - [2] đặt ra và nghiên cứu vào năm 1988. Tiêu chuẩn cần và đủ để bài toán này có nghiệm duy nhất đã được Nguyễn Văn Mậu giải quyết năm 1990. Tất cả các kết quả trên đều được giải quyết dưới giả thiết là các toán tử ban đầu đã cho tính chất (c) tương tự như các tính chất cơ bản của toán tử ban đầu Cauchy cho đạo hàm cổ điển. Trong [6], chúng tôi đã cho điều kiện cần và đủ để bài toán nội suy Lagrange tồn tại và duy nhất nghiệm khi các toán tử ban đầu không thỏa mãn tính chất (c) và xây dựng công thức nội suy Lagrange dưới dạng hiển.

Trong bài này, dựa vào các kết quả của [6], sẽ đưa ra các tiêu chuẩn để bài toán nội suy hỗn tạp Newton-Lagrange có nghiệm duy nhất. Ngoài ra chúng tôi cũng trình bày chi tiết thuật toán để tìm nghiệm tường minh của bài toán này.

1. MỘT VÀI TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TOÁN TỬ BAN ĐẦU

Giả sử X là một không gian tuyến tính trên trường số thực hoặc phức. Gọi $R(X)$ là tập tất cả các toán tử khả nghịch phải tác động trong X và có nghịch đảo phải xác định trên toàn không gian X. Đối với mỗi $D \in R(X)$ ta ký hiệu $\mathcal{R}_D$ là tập tất cả các nghịch đảo phải của D và $\mathcal{F}_D$ là tập tất cả các toán tử ban đầu của D:

$$\mathcal{F}_D = \left\{F \in L_0(X) \ : \ FX = ker\ D,\ F^2 = F,\ \underset{R \in \mathcal{R}_D}{\exists}\ FR = 0\right\}.$$

Về sau, ta luôn luôn giả thiết $dim ker D = s$, $0 < s < \infty$. Nếu $R \in \mathcal{R}_D$ và $F \in \mathcal{F}_D$ sao cho $FR = 0$ thì ta nói F là toán tử ban đầu của D ứng với R.

Định nghĩa 1. Giả sử $D \in R(X)$ và $R \in \mathcal{R}_D$. Toán tử ban đầu F_0 (không ứng với R) được gọi là toán tử ban đầu có tính chất $c(R)$ nếu tồn tại các hằng số c_k sao cho

$$F_0 R^k s = (c_k/k!)s \quad \text{với mọi} \quad s \in ker\ D,\ k \in \mathbf{N}.$$

Ký hiệu: $P_N(R) = \text{lin}\{s, Rs, \ldots, R^{N-1}s,\ s \in ker\ D\}$. Dễ thấy rằng $P_N(R) \subset ker\ D^N$. Nói chung, trong trường hợp tổng quát thì $P_N(R) \neq ker\ D^N$. Ta có các tính chất sau đối với các toán tử ban đầu có tính chất $c(R)$.

Định lý 1 ([1]). Tập hợp tất cả các toán tử ban đầu $\mathcal{F}_D$ có tính chất $c(R)$ khi và chỉ khi $dim\ ker\ D = 1$.

Bổ đề 1. ([6]). $P_N(R) = ker\ D^N$ khi và chỉ khi $dim\ ker\ D = 1$.

Bổ đề 2. ([6]). Nếu $1 < dim\ ker\ D = s < \infty$ thì toán tử ban đầu F_0 có tính chất $c(R)$ khi và chỉ khi với mỗi cơ sở $(e_1, e_2, \ldots, e_s)$ của $ker\ D$ ta đều có

$$F_0 R^k e_j = d_k e_j, \quad d_k \text{ là hằng số},\ k \in \mathbf{N},\ j = 1, \ldots, s.$$

Định nghĩa 2 ([3]). Hệ các toán tử ban đầu $(F_1, \ldots, F_N)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên $P_N(R)$ nếu

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i F_i u = 0 \quad \text{với mọi} \quad u \in P_N(R)$$

kéo theo $\beta_1 = \cdots = \beta_N = 0$.

Định nghĩa 3 ([6]). Hệ các toán tử ban đầu $(F_1, \ldots, F_N)$ được gọi là độc lập tuyến tính mạnh trên $P_N(R)$ khi và chỉ khi tồn tại một cơ sở $(e_1, e_2, \ldots, e_s)$ của $ker\ D$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i F_i u_j = 0 \text{ với mọi } u_j \in P_{Nj}(R) \ := \ \text{lin}\{e_j, Re_j, \ldots, R^{N-1}e_j\}$$

kéo theo $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = S_N = 0$.

Ta thấy ngay từ định nghĩa suy ra hệ toán tử ban đầu độc lập tuyến tính mạnh trên $P_N(R)$ sẽ kéo theo độc lập tuyến tính trên $P_N(R)$. Nếu $dim\ ker\ D = 1$, thì hai khái niệm này trùng nhau.

Ví dụ 1. Xét $X = C(\mathbf{R})$ trên trường phức $D = d^2/dt^2$,

$$(RX)(t) = \int_0^t \int_0^u x(v)dudv,\ ker\ D = \text{lin}\{e_1, e_2\},\ e_1 = 1,\ e_2 = t,$$

$P_2(R) = \text{lin}(z, Rz) = a(d_1 + d_2t) + b(d_1t^2/2 + d_2t^3/6)$, $a, b, d_1, d_2 \in \mathbf{C}$. Giả sử F_1, F_2 là hai toán tử ban đầu được định nghĩa như sau

$$(F_1x)(t) = x(0) + x'(0)t,$$
$$(F_2x)(t) = \frac{1}{2}[x(1) + x(-1)] + \frac{1}{2}[x'(1) + x'(-1)]t.$$

Khi đó các toán tử F_1 và F_2 độc lập tuyến tính mạnh trên $P_2(R)$. Thật vậy, $P_{21}(R) = \text{lin}(e_1, Re_1)$, $P_{22}(R) = \text{lin}(e_2, Re_2)$ và $(aF_1 + bF_2)(d_1e_1 + d_2Re_1) = ad_1 + b(d_1 + d_2/2) = 0$, $\forall d_1, d_2$ kéo theo $a = b = 0$, $(aF_1 + bF_2)(d_1e_2 + d_2Re_2) = [(a + b)d_1 + (b/2)d_2]t = 0$ kéo theo $a = b = 0$.

Từ đó, theo nhận xét ở trên ta cũng có F_1, F_2 độc lập tuyến tính trên $P_2(R)$.

2. BÀI TOÁN NỘI SUY NEWTON-LAGRANGE

a. Nội suy Lagrange. Tìm nghiệm của phương trình $D^n x = 0$ thỏa mãn các điều kiện

$$F_i x = u_i, \quad u_i \in \ker D \text{ cho trước}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Trong [6] đã cho điều kiện cần và đủ để bài toán nội suy Lagrange có nghiệm duy nhất dưới dạng sau:

Định lý 2: Bài toán nội suy Lagrange tồn tại duy nhất nghiệm với mọi giá trị ban đầu $u_i (i = 1, \dots, n)$ khi và chỉ khi hệ các toán tử ban đầu $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ độc lập tuyến tính mạnh trên $P_n(R)$.

Công thức nội suy Lagrange được tính theo lược đồ sau đây. Giả sử $(e_1, \dots, e_s)$ là cơ sở của $\ker D$. Khi đó:

$$F_i R^k e_j = \sum_{m=1}^{s} \beta_{ikjm} e_m,$$

Đặt

$$\beta_{ikjm} := \beta_{(i-1)s+m,ks+j}, \qquad u_i = \sum_{\mu=1}^{s} u'_{(i-1)s+\mu} e_\mu,$$

$$z_i = \sum_{\mu=1}^{s} z'_{is+\mu} e_\mu, \qquad E = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,ns}. \tag{1}$$

Nghiệm của bài toán nội suy Lagrange được tìm dưới dạng $z = z_0 + Rz_1 + \cdots + R^{n-1}z_{n-1}$, trong đó z_i có dạng (1) là nghiệm duy nhất của hệ đại số tuyến tính: $E\bar{z} = \bar{u}$, $\bar{z} = (z'_1, \dots, z'_{ns})$, $\bar{u} = (u'_1, \dots, u'_{ns})$.

b. Bài toán nội suy Newton. Tìm nghiệm của phương trình $D^n z = 0$ thỏa mãn các điều kiện biên hỗn tạp dạng $F_i D^i z = u_i$, $u_i \in \ker D$ cho trước, F_i là các toán tử ban đầu tùy ý, $i = 0, \dots, n-1$.

Định lý 3. ([2]). Bài toán nội suy Newton luôn luôn có nghiệm duy nhất và nghiệm được tính theo công thức

$$z = R_0 R_1 \dots R_{n-1} u_{n-1} + R_0 u_1 \dots R_{n-2} u_{n-2} + \cdots + R_0 u_1 + u_0.$$

c. Bài toán nội suy Newton-Lagrange.

Ta xét bài toán nội suy hỗn tạp sau đây: Tìm nghiệm của phương trình $D^N z = 0$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$F_i z = u_i, \quad i = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$F_i D^i z = u_i, \quad i = n, n+1, \ldots, N-1. \tag{3}$$

Nhận xét rằng khi $n = 1$ thì ta được bài toán Newton và khi $n = N$ thì sẽ thu được bài toán Lagrange.

Dựa vào công thức khai triển Taylor-Goncharov ta có thể tìm nghiệm của bài toán dưới dạng sau:

$$z = \sum_{j=0}^{n-1} R^j z_j + R^n z_n + \sum_{j=n+1}^{N-1} R^n R_n \ldots R_{j-1} z_j, \quad z_j \in ker\ D, \tag{4}$$

$R \in \mathcal{R}_D$ cho trước $R_n, \ldots, R_{N-1} \in \mathcal{R}_D$ là các nghịch đảo phải tương ứng với các toán tử ban đầu $F_n, \ldots, F_{N-1}$.

Đặt

$$z_0 = R^n u_n + \sum_{j=n+1}^{N-1} R^n R_n \ldots R_{j-1} u_j, \tag{5}$$

$$z = z_0 + \sum_{j=0}^{n-1} R^j z_j. \tag{6}$$

Khi đó dễ dàng kiểm tra rằng $F_i D^i z = F_i D^i z_0 = u_i (i = n, \ldots, N-1)$. Vậy chỉ còn xác định các nghiệm thỏa mãn các điều kiện (2)

Từ điều kiện (2), suy ra

$$F_i \Big(z_0 + \sum_{j=0}^{n-1} R^j z_j\Big) = u_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

hay

$$\sum_{j=0}^{n-1} F_i R^j z_j = \tilde{u}_i, \quad \tilde{u}_i := u_i - F_i z_0. \tag{7}$$

Định lý 4. Bài toán nội suy Newton-Lagrange có nghiệm duy nhất với mọi giá trị ban đầu $u_i (i = 0, 1, \ldots, N-1)$ khi và chỉ khi hệ các toán tử ban đầu $\{F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}\}$ độc lập tuyến tính mạnh trên $P_n(R)$. Khi đó nghiệm của bài toán được tính theo công thức sau:

$$z = \sum_{j=0}^{n-1} R^j z_j + R^n u_n + \sum_{j=n+1}^{N-1} R^n R_n \ldots R_{j-1} u_j,$$

trong đó $R \in \mathcal{R}_D$ cho trước, $R_n, \ldots, R_{N-1} \in \mathcal{R}_D$ là các nghịch đảo phải tương ứng với $F_n, \ldots, F_{N-1}$, z_j có dạng (1) là nghiệm duy nhất của hệ đại số tuyến tính

$$E\bar{z} = \bar{u}', \quad \bar{z} = (z'_1, \ldots, z'_{n_0})^T, \quad \bar{u}' = (u_1, \ldots, u_{n_0})^T.$$

Chứng minh được suy trực tiếp từ các định lý 2 và 3 và điều kiện (7)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Prseworska-Rolewics D., Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators. *Demonstratio Math.* 21 (1988), 1023-1044.
2. Prseworska-Rolewics D., Algebraic Analysis. PWN-Polish Sc. Pub. Warssawa-Dordrecht, 1988.
3. Nguyễn Văn Mậu, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and its applications to singular integral equations. *Demonstratio Math.* 23 (1990), 191-212.
4. Tasche M., A unified approach to interpolation methods. J. Intergral Equations 4 (1982), 55-75.
5. Nguyễn Văn Mậu, Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators, *Dissertationes Mathematicae*, Warszawa 1991, 171p.
6. Phạm Quang Hưng, On Lagrange interpolation problem induced by right invertible operators. Tóm tắt báo cáo Hội nghị khoa học kỷ niệm 35 năm ĐHTH Hà Nội, 1991, 41-42

Pham Quang Hung

NEWTON-LAGRANGE INTERPOLATION FORMULA FOR RIGHT INVERTIBLE OPERATORS

The general interpolation problems induced by right invertible operators were investigated by Przeworska-Rolewics and Nguyen Van Mau. All results of those authors based on the property (c) of a given system of initial operators.In [6],we obtained a necessary and sufficient condition for Lagrange interpolation problem to have a unique solution without the property (c). In this paper we apply this result to study mixed Newton-Lagrange interpolation problem.

Khoa Toán - Cơ - Tin học - ĐHTH Hà Nội