TẠP CHÍ KHOA HỌC No 1 - 1992

Nguyễn Vũ Lương

TIÊU CHUẨN VOLTERRA CỦA NGHỊCH ĐẢO PHẢI ĐỐI VỚI TOÁN TỬ SAI PHÂN CÓ TRỌNG

Giả sử X là không gian tuyến tính của các dãy vô hạn xác định trên trường vô hướng $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$ và $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ là một phần tử cho trước trong X. Xét toán tử $D_p x := \{x_{n+1} - p_n x_n\}$. Khi đó, nếu $p_n \neq 0$ với mọi n, thì D_p là một toán tử khả nghịch phải (xem [1] - [4]). Các tiêu chuẩn để một nghịch đảo phải của D_p là toán tử Volterra đã được Przeworska-Rolewics và Kalfat [1], [5] nghiên cứu. Trong bài này, dựa trên các kết quả đã nhận được trong [6] về lớp toán tử sai phân suy rộng, sẽ mô tả các nghịch đảo phải Volterra của D_p với trọng p tùy ý.

1. TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH PHẢI VÀ TOÁN TỬ VOLTERRA

Ký hiệu $L(X)$ là tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong không gian tuyến tính X và $L_0(x) := \{A \in L(X) : dom\, A = X\}$. Tập hợp tất cả các toán tử khả nghịch phải trong $L(X)$ với nghịch đảo phải trong $L_0(X)$ được ký hiệu bởi $R(X)$. Ứng với mỗi $D \in R(X)$ ký hiệu $\mathcal{R}_D$ là tập hợp tất cả các nghịch đảo phải của D trong $L_0(X)$. Xét tập hợp:

$$\mathcal{F}_D := \{F \in L_0(X) : FX = ker\, D, \quad F^2 = F, \quad \exists_{R \in \mathcal{R}_D} FR = 0\}.$$

Mọi toán tử $F \in \mathcal{F}_D$ được gọi là toán tử ban đầu của D. Nếu $F \in \mathcal{F}_D$ và $FR = 0$ với $R \in \mathcal{R}_D$ thì F được gọi là toán tử ban đầu của D ứng với R.

Giả sử $A \in L_0(X)$. Nếu ứng với mọi $\beta \in \mathcal{F}$, toán tử $I - \beta A$ đều khả nghịch, thì A được gọi là toán tử Volterra. Nếu $D \in R(X)$ và tồn tại nghịch đảo phải Volterra của D thì ta nói D có đặc trưng Volterra. Tập hợp tất cả các toán tử Volterra được ký hiệu bởi $V(X)$.

2. TOÁN TỬ SAI PHÂN SUY RỘNG

Cho $X = (c)$ là một không gian tuyến tính các dãy số vô hạn trên trường $\mathcal{F}$, X_0 là không gian con hữu hạn chiều của X với cơ sở $\{e_k = (a_{k0}, a_{k1}, a_{k2}, \ldots), k = 1, 2, \ldots, s\}$.

Định nghĩa 1 [6]. Mọi toán tử khả nghịch phải thuộc $L_0(X)$ nhận X_0 là nhân của nó được gọi là toán tử sai phân suy rộng.

Vì $\{e_1, \ldots, e_s\}$ là cơ sở của X_0, nên tồn tại s chỉ số $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_s$ sao cho hệ các vectơ

$$\{e_i' = (a_{ik_1}, a_{ik_2}, \ldots, a_{ik_s}), \quad i = 1, 2, \ldots, s\}$$

là độc lập tuyến tính.

Vậy ma trận $Q_E := (a_{ik_j})_{i,j=1,\ldots,s}$ khả nghịch và tồn tại ma trận nghịch đảo $Q_E^{-1} = (d_{k,j})_{i,j=1,\ldots,s}$.

Xét các toán tử hoán vị sau đây $T_r\{x_n\} = \{y_{r,n}\}$ trong đó

$$y_{r,n} = \begin{cases} x_n & \text{nếu } n \neq k_r, n \neq n-1 \\ x_{r-1} & \text{nếu } n = k_r \\ x_{k_r} & \text{nếu } n = r-1, \qquad r = 1, \ldots, s. \end{cases}$$

và $T = T_1 T_2 \ldots T_s$.

Dễ thấy rằng các toán tử T_r và T là các toán tử đối hợp và đôi một giao hoán với nhau.

Đặt

$$D'x := \{x_{n+s+1} - x_n - \sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{s} d_{k,i} x_{k_r} (\beta_{i,n+s+1} - \beta_{i,n=s})\}, \tag{2}$$

$$R'x := (0, 0, \ldots, 0, x_0, x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \ldots), \tag{3}$$

$$D := D'T, \quad R := TR'. \tag{4}$$

Khi đó, bằng tính toán trực tiếp ta có kết quả sau đây

Định lý 1 [6]. D xác định theo công thức (2) - (4) là toán tử sai phân suy rộng và R là nghịch đảo phải của D.

3. TOÁN TỬ SAI PHÂN VỚI TRỌNG VÀ ĐẶC TRƯNG VOLTERRA

Giả sử $e_0 = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$, $\beta_0 \neq 0$ và $X_0 = \text{lin}\{e_0\}$. Ứng với véc tơ trọng cho trước tùy ý $p = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$ ta xét các toán tử D_p, $A^{(p)}$, $D^{(p)}$ và $R^{(p)}$ xác định theo công thức sau

$$D_p\{x_n\} = \{x_{n+1} - p_n x_n\}, \tag{5}$$

$$A^{(p)}\{x_n\} = -\frac{x_0}{\beta_0}\{\beta_{n+1} - p_n \beta_n\}, \tag{6}$$

$$D^{(p)} = D_p + A^{(p)}, \tag{7}$$

$$R^{(p)}\{x_n\} = \{y_n\}, \quad y_0 = 0, \quad y_n = x_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \Big(\prod_{i=k}^{n-2} p_i\Big) x_k. \tag{8}$$

Bổ đề 1. $A^{(p)}R^{(p)} = I$.

Chứng minh được suy trực tiếp từ công thức (6) và (8).

Định lý 2.

(i) Toán tử $D^{(p)}$ khả nghịch phải và $D^{(p)}R^{(p)} = I$,

(ii) $ker\ D^{(p)} = X_0$,

(iii) Toán tử ban đầu của $D^{(p)}$ ứng với nghịch đảo phải $R^{(p)}$ được xác định theo công thức

$$F^{(p)}\{x_n\} = \frac{x_0}{\beta_0}e_0. \tag{9}$$

Chứng minh. (i) Áp dụng Bổ đề 1, ta có

$$D^{(p)}R^{(p)} = D_p R^{(p)} + A^{(p)}R^{(p)} = D_p R^{(p)} + I.$$

(ii) Từ định nghĩa (5) và (6) suy ra $\{x_n\} \in ker\ D^{(p)}$ khi và chỉ khi $x_{n+1} - p_n x_n - (x_0/\beta_0)(\beta_{n+1} - \beta_n p_n) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Nhận xét rằng $x_0 = (x_0/\beta_0)\beta_0$. Bằng phương pháp qui nạp ta nhận được $x_k = (x_0/\beta_0)\beta_k$ và $\{x_n\} = (x_0/\beta_0)e_0$ hay $X_0 = ker\ D^{(p)}$.

(iii) Toán tử $F^{(p)}$ là toán tử chiếu X lên X_0. Thật vậy,

$$F^{(p)}(F^{(p)}\{x_n\}) = F^{(p)}\frac{x_0}{\beta_0}e_0 = \frac{x_0}{\beta_0}e_0 = F^{(p)}\{x_n\}.$$

Bây giờ ta xét tiêu chuẩn Volterra đối với nghịch đảo phải của toán tử sai phân với trọng tùy ý.

Giả sử β_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots, N)$ là các tọa độ khác 0 của véctơ cơ sở e_0. Không mất tính tổng quát, có thể xem $k_1 < k_2 < \cdots < k_N$

Xây dựng đa thức $P_n(t)$ theo công thức truy hồi sau đây

$$\begin{aligned} &P_0(t) = \beta_0, \quad P_1(t) = \beta_1 + tP_0(t), \\ &P_n(t) = \beta_n + tP_{n-1}(t) + \sum_{k=0}^{n-2}\Big(\prod_{i=k}^{n-2} p_i\Big)P_k(t), \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

và đặt

$$W_p(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{\beta_{k_i}} P_{k_i}(t), \quad a_1 + \cdots + a_N = 1. \tag{11}$$

Bổ đề 2. Toán tử F xác định theo công thức

$$F := \sum_{i=1}^{N} a_i F_{k_i}^{(p)}, \quad F_{k_i}^{(p)}x = \frac{x_{k_i}}{\beta_{k_i}}e_0, \quad a_1 + \cdots + a_n = 1, \tag{12}$$

là toán tử ban đầu của $D^{(p)}$ ứng với nghịch đảo phải

$$R := R^{(p)} - FR^{(p)}, \tag{13}$$

trong đó $R^{(p)}$ xác định theo công thức (8).

Chứng minh. Tương tự như (iii) của Định lý 2, dễ kiểm tra rằng $F^{(p)}_{k_i}(i = 1, \dots, N)$ là các toán tử ban đầu cúaa $D^{(p)}$. Từ đó suy ra tổ hợp tuyến tính F dạng (12) cũng là toán tử ban đầu và $FR = FR^{(p)} - F^2 R^{(p)} = 0$, $D^{(p)}R = I$.

Định lý 3. Nghịch đảo phải R dạng (13) là toán tử Volterra khi và chỉ khi đa thức $W_p(t)$ dạng (11) không có nghiệm trong trường đã cho.

Chứng minh. Xét phương trình

$$(I - tR^{(p)})\{x_n\} = \{y_n\}.$$

Từ công thức (8) ta nhận được

$$x_0 = y_0, \quad x_1 = y_1 + tx_0, \dots, x_n = y_n + t\Big(x_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\Big(\prod_{i=k}^{n-2} p_i\Big)x_k\Big) \tag{14}$$

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất với mọi vế phải $\{y_n\} \in X$. Vậy $R^{(p)}$ là nghịch đảo phải Volterra.

Định nghĩa hàm Exponent $e_t(z) = \big(I - tr^{(p)}\big)^{-1}(z)$, $z \in ker\ D^{(p)}$. Vì $ker\ D^{(p)} = X_0$ nên $e_t(z) = ce_t(e_0)$, $c \in \mathcal{F}$. Công thức (14) kéo theo $e_t(e_0) = P_n(t)$. Vậy để kiểm tra tiêu chuẩn Volterra của R ta chỉ cần chứng minh $F(e_t(z)) \neq 0$ với mọi $t \in \mathcal{F}$, $0 \neq z \in ker\ D^{(p)}$ (xem [2], [4]). Mặt khác, ta lại có:

$$F(e_t(z)) = cF(e_t(z)) = c\sum_{i=1}^{N} a_i F^{(p)}_{k_i}(e_t(z)) =$$

$$= c\sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{\beta_{k_i}} P_{k_i}(t)e_0 = cW_p(t)e_0 \neq 0, \text{dpcm}.$$

Nhận xét. Một số đặc trưng Volterra khác còn có thể nhận được nhờ các nhóm D - dịch chuyển và R - dịch chuyển (xem [2]).

Hệ quả 1. Nếu $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ và $N \geq 2$ thì R không là toán tử Volterra.

Hệ quả 2. Nếu $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ và k_N lẻ thì $R \in V(X)$. Nếu k_i chẵn ứng với mọi $i = 1, 2, \dots, N$ và $a_i > 0$ $(i = 1, \dots, N)$ thì $R \in V(X)$.

Hệ quả 3 [5]. Nếu $D^{(p)}\{x_n\} = \{x_{n+1} - px_n\}$ thì

$$P_n(t) = (t+p)^n, \qquad W_p(t) = \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i}{p^{k_i - 1}}(t+p)^{k_i}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Przeworska-Rolewicz D., Property (c) and interpolation formulae induced by right invertible operators. *Demonstratio Math.* 21 (1988), 1023-1044.
2. Przeworska-Rolewicz D., Algebraic Analysis. PWN - Reidel Pub. Warszawa-Dordrecht, 1988.
3. Nguyen Van Mau, Interpolation problems induced by right and left invertible operators and applications to singular integral equations, *Demonstratio Math.* 23 (1990), 191-212.
4. Nguyen Van Mau, Characterisation of right Volterra inverses, *Opuscula Math.* 6 (1990), 21-37.
5. Kalfat A., Volterra right inverses for weighted difference operators, *Demonstratio Math.*, 19 (1986), 1089-1093.
6. Nguyen Vu Luong. On a class of generalised difference operators. Tóm tắt báo cáo HNKH kỷ niệm 35 năm ĐHTH Hà Nội, 1991, 46.

Nguyen Vu Luong

CONDITIONS FOR RIGHT INVERSES OF WEIGHTED DIFFERENCE OPERATORS TO BE VOLTERRA

Let X be a linear space of all infinite sequences over a field of scalars $\mathcal{F}$ (where $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) and let $P = (P_0, P_1, P_2, \dots)$ be a given element in X. We deal with the following operator $D_P x := \{x_{n+1} - P_n x_n\}$. It is well - known that, if $P_n \neq 0$ for all n, then D_p is a right invertible operator (cf. [1] - [4]). The conditions for a right inverse of D_p to be volterra was inverstigated by Przeworska - Rolewicz and Kalfat [1], [5]. In this report, based on our results about generalised difference operators in [6], we describe Volterra characterisations of D_p with an arbitrary weight P.

Khoa Toán - Cơ - Tin học - ĐHTH Hà Nội