TẠP CHÍ KHOA HỌC No 7 - 1994

TIÊU CHUẨN VOLTERRA ĐỐI VỚI NGHỊCH ĐẢO PHẢI :ỦA MỘT LỚP TOÁN TỬ TRONG KHÔNG GIAN RỜI RẠC

Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Văn Mậu
Khoa Toán, Cơ, Tin học - ĐHTH Hà Nội

Trong bài này, đưa ra tiêu chuẩn để nghịch đảo phải của các toán tử dạng

$$D_\alpha x = (\alpha_n x_{n+1}) \quad \text{và} \quad D_p x = (x_{n+1} - p x_n)$$

nột toán tử Volterra. Từ đó mô tả tường minh lớp nghịch đảo phải Volterra trong không gian rạc.

1. Ký hiệu $X = (c)$ là không gian các dãy số $x = (x_n)_{n=0}^{\alpha}$ trên trường $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathbf{C}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathbf{R}$) các phép cộng và nhân với đại lượng vô hướng theo định nghĩa thông thường. Gọi $L(X)$ là tập › tất cả các toán tử tuyến tính tác động trong X và $L_0(X) = \{A \in L(X),\ \text{do}\ mA = X\}$. Tập cả các toán tử khả nghịch phải thuộc $L(X)$ được ký hiệu là $R(X)$. Nếu tồn tại $R_0 \in L_0(X)$ cho $DR = I$ thì ta viết $D \in R_0(X)$. Tập tất cả các nghịch đảo phải của $D \in R(X)$ ký hiệu R_D.

Ứng với mỗi $R \in R_D$ của $D \in R(X)$, ký hiệu $\mathcal{F}_D$ là tập hợp tất cả các toán tử ban đầu của ‹à $F_R \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu tương ứng với $R \in R_D$.

Nếu $B \in L_0(X)$ sao cho $\exists (I + \lambda B)^{-1}$ $\forall \lambda \in \mathcal{F}$ thì B được gọi là toán tử Volterra. Tập tất cả toán tử Volterra trong $L_0(X)$ được ký hiệu bởi $V(X)$.

Giả sử $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$ là dãy số trong cho trước, $\alpha_j \neq 0$ $\forall j = 0, 1, 2, \dots$

Xét toán tử $D_\alpha : X \to X$ xác định theo công thức:

$$D_\alpha x = y; \quad y_n = \alpha_n x_{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

Khi đó $D_\alpha \in L_0(X)$ và $\ker D = \operatorname{lin} e$ với $e = (1, 0, 0, \dots)$.

Xét toán tử $R_0 : X \to X$ xác định bởi:

$$R_0 x = \left(0, \frac{x_0}{\alpha_0}, \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots\right) \tag{2}$$

Dễ dàng kiểm chứng $R_o \in L_0(X)$ và $D_\alpha\ R_0 = I$, trong đó I là toán tử đơn vị.

Vì $\dim \ker D_\alpha = 1$ nên $D_\alpha \in R_0(X)$ và D_α không khả nghịch

đề 1: R_0 là toán tử Volterra.

C h ứ n g m i n h : Thật vậy, với R_0 dạng (3) thì phương trình:

$$(I - \lambda R_0)x = y, \quad y \in X$$

n luôn có nghiệm duy nhất xác định theo hệ thức truy hồi

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 \\ x_n &= \lambda \frac{x_{n-1}}{\alpha_{n-1}} + y_n; \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vậy $R_0 \in V(X)$.

Bổ đề 2 [1] (xem [2] - [3]). Mọi nghịch đảo phải của D_α đều biểu diễn được dưới dạng

$$R_A = R_0 + F_0 A, \quad A \in L_0(X)$$ (3)

trong đó $F_0 = I - R_0 D_\alpha \in \mathcal{F}_D$.

Bổ đề 3. Với mỗi $c \in \mathcal{F}$, ký hiệu

$$X_c = \Big\{(c, x_1, x_2, \dots);\ x_j \in \mathcal{F};\quad j = 1, 2, \dots\Big\}$$

Khi đó $\forall A \in L_0(X)$ sao cho $\operatorname{Im} A \subset X_c$ thì $R_A = R_0 + F_0 A$ là toán tử Volterra.

Chứng minh: Thật vậy, khi $\operatorname{Im} A \subset X_c$ thì $\forall x \in X$, $\exists y = (c, y_1, y_2, \dots) \in X_c$ sao cho $Ax = y$. Khi đó

$$\begin{aligned} F_0 Ax &= (I - R_0 D_\alpha)y = \\ &= (c, y_1, y_2, \dots) - R_0(\alpha_0 y_1, \alpha_1 y_2, \alpha_2 y_3, \dots) \\ &= (c, y_1, y_2, \dots) - (0, y_1, y_2, \dots) = (c, 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Suy ra

$$R_A x = R_0 X + (c, 0, 0, \dots) = \Big(c, \frac{x_0}{\alpha_0}, \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots\Big).$$

Phương trình

$$(I - \lambda R_A)x = v, \quad v \in X$$

luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo công thức

$$\begin{aligned} x_0 &= u_0 + c \\ x_n &= u_n + \lambda \frac{x_{n-1}}{n-1}\ ;\ n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vậy $R_A \in V(X)$.

Bổ đề 4. Giả sử $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ và $A \in L_0(X)$ sao cho $\exists v$, $v \in X$ để $A(u - v) \notin \operatorname{Im} R_0$ thì R_A xác định theo công thức (3) không là toán tử Volterra.

Chứng minh: Theo giả thiết, $\exists m \in \mathbf{N}$, $c, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbf{C}$ sao cho $\forall x \in X$:

$$Ax = (y_0, y_1, y_2, \dots); \quad y_0 = c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j; \quad \beta_m \neq 0.$$

Khi đó $F_0 Ax = \Big(c + \sum\limits_{j=0}^{m} \beta_j x_j, 0, 0, \dots\Big)$ và

$$R_A x = (R_0 - F_0 A)x = \Big(c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j, \frac{x_0}{\alpha_0}, \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots\Big)$$

Xét phương trình

$$(I + \lambda R_A)x = v, \quad v \in X.$$

$$\longleftrightarrow \Big(x_0 + c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j, \frac{x_0}{\alpha_0} + x_1, \frac{x_1}{\alpha_1} + x_2, \dots\Big) = (v_0, v_1, v_2, \dots)$$

So sánh m tọa độ đầu tiên, ta được hệ tuyến tính:

$$
\begin{aligned}
& x_0 + \lambda \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j = v_0 - c \\
& \frac{\lambda}{\alpha_0} x_0 + x_1 = v_1 \\
& \dots\dots\dots\dots \\
& \frac{\lambda}{\alpha_{m-1}} x_{m-1} + x_m = v_m
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Ma trận của hệ (4) có dạng:

$$
B = \begin{pmatrix}
1+\beta_0\lambda & \beta_1\lambda & \beta_2\lambda & \dots & \beta_m\lambda \\
\frac{1}{\alpha_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \frac{1}{\alpha_1}\lambda & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
$$

hiệu $P(\lambda) := \det B$. Khi đó

$$
P(\lambda) = \frac{(-1)^m \beta_m}{\alpha_0 \dots \alpha_{m-1}} \lambda^{m+1} + \dots + 1 \tag{5}
$$

Do vậy, trong $\mathbf{C}$, $P(\lambda)$ có ít nhất một nghiệm. Nếu $P(\lambda_0) = 0$ thì hệ (4) không có nghiệm c có nghiệm không duy nhất. Ứng với $\lambda = \lambda_0$ phương trình $(I + \lambda R_A)x = v$ không có nghiệm c có nghiệm không duy nhất. Vậy

$$
R_A \notin V(X)
$$

Ta có thể phát triển các kết quả của Bổ đề 3 và 4 dưới dạng sau:

h lý 1. a) Với $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ và $A \in L_0(X)$ thì R_A dạng (3) là toán tử Volterra khi và chỉ khi $\exists c \in \mathbf{C}$ cho $\operatorname{Im} A \subset X_c$ với

$$
X_c = \{x \in X \ : \ x_0 = c\}
$$

b) Với $\mathcal{F} = R$ thì R_A dạng (3) là toán tử Volterra khi và chỉ khi hoặc $\operatorname{Im} A \subset X_c$ hoặc đa : $P(\lambda)$:= $\det B$ (B là ma trận của hệ (4)) không có nghiệm thực.

2. Bây giờ, ta chuyển sang xét lớp toán tử sai phân có trong $p \in \mathcal{F}$, $p \neq 0$:

$$
D_p x = (x_{n+1} - p x_n).
$$

Xét toán tử $R_p : X \to X$ xác định theo công thức

$$
R_p x := (0, x_0, x_1 + p x_0, x_2 + p^2 x_0 + p x_1, \dots) \tag{6}
$$

Dễ dàng kiểm tra trực tiếp các hệ thức sau:

$$
\begin{aligned}
& D_p R_p = I \\
& \operatorname{Ker} D_p = \operatorname{lin} e; \quad e = (1, p, p^2, p^3, \dots)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Vậy $D_p \in R_0(X)$ và $R_p \in R_{D_p}$.

Gọi $F_p \in D_p$ là toán tử ban đầu ứng với R_p. Khi đó

$$F_p x = (x_0, px_0, p^2 x_0, \dots).$$

Bổ đề 5. Toán tử R_p dạng (6) là toán tử Volterra.

Chứng minh. Thật vậy, phương trình

$$(I - \lambda R_p)x = y, \quad y \in X$$

luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo công thức truy hồi

$$\begin{aligned} &x_0 = y_0 \\ &x_n = y_n + \lambda(x_{n-1} + px_{n-2} + \cdots + p^{n-1}x_0) \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Vậy $R_p \in V(X)$.

Với mỗi $c \in \mathcal{F}$, ký hiệu

$$X_c = \{x \in X : x = (c, x_1, x_2, \dots)\}$$

Bổ đề 6. Với mỗi $A \in L_0(X)$ sao cho $\mathrm{Im}A \subset X_c$ với $c \in \mathcal{F}$ cho trước, thì toán tử $R_A = R_p + F$ là toán tử Volterra.

Chứng minh: Với $c \in \mathcal{F}$ cho trước và $\forall Ax$ ta có:

$$\begin{aligned} F_p Ax &= F_p(c, y_1, y_2, \dots) = (c, cp, cp^2, \dots) \\ R_A x &= R_p x + F_p Ax = \\ &= (0, x_0, x_1 + px_0, x_2 + px_1 + p^2 x_0, \dots) + (c, cp, co^2, \dots) = \\ &= (c, x_0 + cp, x_1 + px_0 + cp^2, \dots) \end{aligned}$$

Xét phương trình:

$$(I - \lambda R_A)x = v, \quad v \in X$$

$$\longleftrightarrow (x_0, x_1, x_2, \dots) - \lambda(c, x_0 + cp, x_1 + px_0 + cp^2, \dots) = (v_0, v_1, v_2, \dots)$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} x_0 &= \lambda c + v_0 \\ x_n &= \lambda(x_{n-1} + px_{n-2} + \cdots + p^{n-1}x_0 + p^n c) + v_n \quad n = 1, 2, 3, .. \end{cases}$$

Vậy $R_A \in V(X)$.

Bổ đề 7. Xét $\mathcal{F} = \mathbf{C}$. Với $A \in L_0(X)$ sao cho $\exists u, v \in X$ để $A(u - v) \not\subset X_0$ thì $R_A := R_p + F_p$ $V(X)$.

Chứng minh: Từ giả thiết, suy ra $\forall x \in X$, $\exists c, \beta_0, \beta_1, \dots \in \mathbf{C}$ sao cho

$$Ax = \left(c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_i, y_1, y_2, \dots\right); \quad \beta_m \neq 0.$$

Vậy

$$F_p Ax = (y_0, py_0, p^2 y_0, \dots), \quad y_0 = c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j$$

Xét phương trình $(I + \lambda R_A)x = v, \quad v \in X$. Vì $R_A = R_p + F_p A$ nên

$$R_A x = (y_0, x_0 + px_0, x_1 + px_0 + p^2 y_0, \dots)$$

$\text{ới } y_0 = c + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j$. Vậy

$$(I + \lambda R_A)x = v, \quad v \in X$$
$$\longleftrightarrow (x_0 + \lambda y_0, x_1 + \lambda(x_0 + py_0), \dots) = (v_0, v_1, \dots).$$

So sánh $m + 1$ tọa độ đầu tiên, ta được hệ tuyến tính:

$$\begin{aligned}
&x_0 + \lambda \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j = v_0 - \lambda c \\
&x_1 + \lambda\Big(x_0 + p\sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j\Big) = v_1 - \lambda pc \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&x_m + \lambda\Big(x_{m-1} + px_{m-2} + \dots + p^{m-1}x_0 + p^m \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j\Big) = v_m - \lambda p^m c
\end{aligned} \tag{9}$$

Ma trận của hệ (9) có dạng

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\beta_0 & \lambda\beta_1 & \dots & \lambda\beta_m \\ \lambda(1 + p\beta_0) & 1 + \lambda p\beta_1 & \dots & \lambda p\beta_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda p^{m-1}(1 + p\beta_0) & \lambda p^{m-2}(1 + p\beta_1) & \dots & 1 + \lambda p^m \beta_m \end{pmatrix} \tag{10}$$

Ký hiệu $Q(\lambda) = \det M$ thì $\deg Q(\lambda) = m + 1$ với hệ số cao nhất bằng $p^{m(m+1)/2}\beta_m \neq 0$.

Do đó $\exists\lambda_0 \in \mathbf{C}$ để $Q(\lambda_0) = 0$, tức là $R_A \notin V(X)$.

Ta có thể phát biểu kết quả của bổ đề 6 và 7 dưới dạng sau đây.

ịnh lý 2. a) Với $\mathcal{F} = \mathbf{C}$ và $A \in L_0(X)$ thì R_A là toán tử Volterra khi và chỉ khi $\exists c \in \mathcal{F}$ sao cho $\mathrm{ı}A \subset X_c$, trong đó X_c xác định theo (8).

b) Với $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ và $A \in L_0(X)$ thì $R_A \in V(X)$ khi và chỉ khi hoặc $\exists c \in \mathbf{R}$ để $\mathrm{Im}A \subset X_c$ hoặc ı thức $Q(\lambda) = \det M$, trong đó M xác định theo (10), không có nghiệm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis. Warsaw - Dordrecht, 1988.

. Nguyen Van Mau, Characterization of Volterra right in ve..es, Opuscula Math. 6 (1990), 21-37.

. Nguyen Vu Luong, On a class of generalized difference operatora. Journal of Sci. 1993, 21-25.

CONDITIONS FOR HIGHT INVERSES OF A CLASS OF RIGHT INVERTIBLE OPERATORS IN DISCRETE SPACES TO BE VOLTERRA

Nguyen Vu Luong, Nguyen Van Mau

Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics Hanoi University

The paper deal with operators of the forms

$$D_\alpha x = (\alpha_n x_{n+1}) \quad \text{and} \quad D_p x = (x_{n+1} - px_n).$$

Operators D_α and D_p are considered in space X of all infinite sequences over a field $\mathcal{F}$ of scalars.

We find a general form of all right inverses and give a necessary and sufficient condition for a right verse of D_α and D_p to be Volterra in the cases $\mathcal{F} = \mathbf{R}$ and $\mathcal{F} = \mathbf{C}$.