TẠP CHÍ KHOA HỌC No 7 - 1994

BIỂU DIỄN MODULA CỦA NHÓM $GL(3, F_2)$

Tôn Thất Trí
Khoa Toán, Đại học Tổng hợp Huế

§1. GIỚI THIỆU VÀ PHÁT BIỂU KẾT QUẢ

Đặt $GL_n = GL(n, F_2)$ là nhóm các $n \times n$ ma trận khả nghịch hệ số trên trường F_2 gồm 2 phần tử. Mục đích của bài báo này là định tập đầy đủ các biểu diễn bất khả quy của đại số nhóm $F_2[GL_3]$ và các $F_2[GL_3]$ mô đun không phân tích được chính.

Đặt $F_2[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ là đại số đa thức của n biến $x_1, \ldots, x_n$ hệ số trên F_2. GL_n tác động lên $F_2[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ theo cách thông thường. Để phát biểu kết quả chúng ta nhắc lại Dickson đã định nghĩa các bất biến của GL_n như sau:

Cho $e_1, \ldots, e_n$ là các số nguyên không âm, đặt

$$[e_1, \ldots, e_n] = \begin{vmatrix} x_1^{2^{e_1}} & \ldots & x_n^{2^{e_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{2^{e_n}} & \ldots & x_n^{2^{e_n}} \end{vmatrix},$$

khi đó $\omega.[e_1, \ldots, e_n] = [e_1, \ldots, e_n]$ với mọi $\omega \in GL_n$. Đặt $L_n = [0, 1, \ldots, n-1]$.

Cho $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $0 \le \beta_1, \beta_2 \le 1$, chúng tôi ký hiệu

$$L^\beta = L_2^{\beta_2} L_1^{\beta_1} \in F_2[x_1, x_2, x_3].$$

1.1. Theorem. *Đặt H_β là $F_2[GL_3]$ mô đun con của $F_2[x_1, x_2, x_3]$ sinh bởi L^β. Khi đó*

$$\{H_\beta \ : \ \beta = (\beta_1, \beta_2), \ 0 \le \beta_1, \beta_2 \le 1\}$$

là tập đầy đủ gồm các $F_2[GL_3]$ mô đun bất khả quy tuyệt đối.

Cho A là đại số nhóm và U là A mô đun bất khả quy. Như đã biết tồn tại duy nhất một A mô đun xạ ảnh không phân tích được $P(U)$ sai kém một A đẳng cấu chứa U như mô đun con bất khả quy duy nhất. $P(U)$ còn được gọi là mô đun không phân tích được chính.

1.2. Theorem.

i) $P(H_{(1,1)}) \cong H_{(1,1)}$

ii) $P(H_{(1,0)}) \oplus H_{(1,1)} \cong H_{(1,1)} \otimes H_{(1,0)}$

iii) $P(H_{(0,1)}) \oplus H_{(1,1)} \cong H_{(1,1)} \otimes H_{(0,1)}$

iv) $P(H_{(0,0)}) \oplus P(H_{(1,0)}) \oplus P(H_{(0,1)}) \oplus H_{(1,1)} \oplus H_{(1,1)} \oplus H_{(1,1)} \cong H_{(1,1)} \otimes H_{(1,1)}$.

Tôi xin chân thành cảm ơn Giáo sư hướng dẫn Huỳnh Mùi đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi hoàn thành bài báo này.

§2. CẤU TẠO TẬP ĐẦY ĐỦ CÁC $F_2[GL_3]$ MÔ ĐUN BẤT KHẢ QUY

Đặt T_3 là nhóm con của GL_3 gồm các ma trận tam giác trên, T_3 là 2 nhóm con Sylow c
GL_3. Trong [4] GS. Mùi đã chứng tỏ.

$$F_2[x_1, x_2, x_3]^{T_3} = F_2[V_1, V_2, V_3], \quad (*$$

ở đây $V_i = \Pi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1}\in F_2}(\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_{i-1}x_{i-1} + x_i)$.

Đặt $L_{ij} = L_2(x_i, x_j)$. Cho $0 \le \beta_1, \beta_2 \le 1$, ký hiệu $U_{(\beta_1,\beta_2)}$ là F_2 không gian véc tơ với tậ
sinh $\{L_{ij}^{\beta_2} x_k^{\beta_1} \ : \ 1 \le i, j, k \le 3\}$. Hiển nhiên $U_{(\beta_1,\beta_2)}$ là $F_2[GL_3]$ mô đun.

2.1. Chứng minh định lý 1.1: Chú ý rằng H_β là $F_2[GL_3]$ mô đun con của $U_{(\beta_1,\beta_2}$
Cho N là $F_2[GL_3]$ mô đun con khác không của H_β. Xem N như là $F_2[T_3]$ mô đun bằng cá
hạn chế tập các tác động trên N từ $F_2[GL_3]$ về $F_2[T_3]$, khi đó N chứa một $F_2[T_3]$ mô đun c
tầm thường một chiều (xem [1], ch. 8, bài tập 1) được sinh bởi một T_3 bất biến $f(x_1, x_2, x_3) \neq$
trong $U_{(\beta_1,\beta_2)}$. Từ (*) và từ $L_2 = V_1V_2$ dễ dàng chứng tỏ rằng bất kỳ phần tử T_3 bất biến tro
$U_{(\beta_1,\beta_2)}$ đều bằng $\alpha L_2^{\beta_2} L_1^{\beta_1} = aL^\beta$ với $a \in F_2$. Do đó $f(x_1, x_2, x_3) = L_2^{\beta_2} L_1^{\beta_1} = L^\beta.L^\beta \in N$ và
là $F_2[GL_3]$ mô đun do đó $N = H_\beta$. Từ đây ta suy ra rằng H_β là bất khả quy.

Nếu chúng ta mở rộng trường hệ số, cùng phương pháp trên được áp dụng. Vì thế H_β là b
khả quy tuyệt đối.

Để chứng tỏ các mô đun H_β là không đẳng cấu với nhau, chúng ta chú ý rằng $H_{(0,0)}$ là bi
diễn tầm thường một chiều, $H_{(1,0)}$ là F_2 không gian véctơ với cơ sở $\{x_1, x_2, x_3\}$, $H_{(1,0)}$ là
không gian vectơ với cơ sở $\{L_{12}, L_{13}, L_{23}\}$ và $\dim H_{(1,1)} > 3$. Do đó chỉ cần chứng tỏ $H_{(0,}$
không đẳng cấu với $H_{(1,0)}$ như $F_2[GL_3]$ mô đun. Giả sử $f \ : \ H_{(0,1)} \cong H_{(1,0)}$ như $F_2[GL_3]$ m
đun. Trong chứng minh trên chúng ta thấy rằng $H_{(0,1)}$ và $H_{(1,0)}$ lần lượt chứa duy nhất các ph
tử T_3 bất biến khác không là L_2 và L_1. Vì f là $F_2[GL_3]$ đẳng cấu nên f cũng là $F_2[T_3]$ đẳng cấ
Do đó $f(L_2) = L_1$. Lấy $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3$, khi đó $f(\sigma.L_2) \neq \sigma.f(L_2)$ mâu thuẫn với
thiết f là $F_2[GL_3]$ đồng cấu. Điều này hoàn thành chứng minh các H_β là không đẳng cấu v
nhau.

Chỉ còn chứng tỏ các mô đun H_β là tập đầy đủ các mô đun bất khả quy cho đại số nh
$F_2[GL_3]$. Điều này sẽ được chứng minh sau khi chứng minh định lý 1.2.

§3. CÁC MÔ ĐUN KHÔNG PHÂN TÍCH ĐƯỢC CHÍNH

Trong tiết này định lý 1.2 và khẳng định các mô đun H_β trong Định lý 1.1 là tập đầy đủ
mô đun bất khả quy cho đại số nhóm $F_2[GL_3]$ sẽ được chứng minh.

Đặt P_m là tập tất cả các đa thức thuần nhất bậc m trong $F_2[x_1, x_2, x_3]$. P_m là $F_2[GL_3]$
đun. Cho m, n, ℓ là các số nguyên không âm và $U \le P_m$, $V \le P_k$ lần lượt là hai $F_2[GL_3]$ mô đ
con của P_m, P_k. Chúng tôi ký hiệu $U^{2^\ell}V$ là F_2 không gian véc tơ với tập sinh $\{u^{2^\ell}v : u \in U, v \in$
Hiển nhiên $U^{2^\ell}V$ là $F_2[GL_3]$ mô đun.

3.1. Bổ đề. Với giả thiết U, V ở trên và ℓ là số nguyên sao cho $2^\ell > k$. Khi đó $U \otimes V \cong U^2$
như $F_2[GL_3]$ mô đun.

Chứng minh: Cơ sở cho U và V lần lượt là $\{u_1, \ldots, u_s\}$ và $\{v_1, \ldots, v_r\}$, khi đó
$\{u_i^{2^\ell} v_j : 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le r\}$ là cơ sở của $U^{2^\ell}V$. Định nghĩa $\psi : U^{2^\ell}V \longrightarrow U \otimes V$ trên các véc
cơ sở bởi $\psi(u_i^{2^\ell} v_j) = u_i \otimes v_j$ và mở rộng tới $U^{2^\ell}V$ bởi tính tuyến tính. Hiển nhiên ψ là $F_2[G$

ng cấu và là toàn ánh. Khi đó một tính toán về chiều chứng tỏ ψ là một đẳng cấu.

3.2. Chứng minh khẳng định i) của định lý 1.2: khẳng định i) của Định lý 1.2 sẽ được ứng minh nếu ta chứng tỏ $H_{(1,1)}$ là $F_2[GL_3]$ xạ ảnh. Đặt T_3' là nhóm con của GL_3 gồm các ma ận tam giác dưới, T_3' là 2 nhóm con Sylow của GL_3. Do đó để chứng tỏ $H_{(1,1)}$ là $F_2[GL_3]$ xạ h ta chỉ cần chứng tỏ $H_{(1,1)}$ là $F_2[T_3']$ xạ ảnh (xem [3], 2.10).

ịnh **nghĩa**. $F_2[T_3']$ đồng cấu $\psi : F_2[T_3'] \longrightarrow H_{(1,1)} \leq U_{(1,1)}$ bởi $\psi(I_3) = L^{(1,1)}$. Cho $\sigma \in T_3'$,

$$\begin{aligned}\psi(\sigma) &= \sigma.(L_2L_1)\\ &= \sum_{1\leq i\leq 3, 1\leq j<k\leq 3} \det{}_i\sigma\det{}_{jk}\sigma x_i L_{jk}\end{aligned}$$

đây $\det_i\sigma$ là định thức của ma trận được tạo bởi các phần tử cột 1 và hàng i của ma trận trận $\det_{jk}\sigma$ là định thức của ma trận được tạo bởi các phần tử ở cột 1, cột 2 và hàng j, hàng k của a trận σ. Vì

$$x_1L_{23} = x_2L_{13} - x_3L_{12}$$

n

$$\begin{aligned}\psi(\sigma) = &\sum_{i\in\{1,2\}} \det{}_i\sigma\det{}_{12}\sigma x_i L_{12} + \sum_{i\in\{1,3\}} \det{}_i\sigma\det{}_{13}\sigma x_i L_{13} + \sum_{i\in\{2,3\}} \det{}_i\sigma\det{}_{23}\sigma x_i L_{23} +\\ &+ (\det{}_2\sigma\det{}_{13}\sigma + \det{}_1\sigma\det{}_{23}\sigma)x_2L_{13} + (\det{}_3\sigma\det{}_{12}\sigma - \det{}_1\sigma\det{}_{23}\sigma)x_3L_{12}.\end{aligned}$$

i $\{x_1L_{12}, x_2L_{12}, x_1L_{13}, x_3L_{13}, x_2L_{23}, x_3L_{23}, x_2L_{13}, x_3L_{12}\}$ là cơ sở của $U_{(1,1)}$ nên $\psi(\sigma)$ hoàn àn được xác định bởi véc tơ

$$\begin{aligned}A_\sigma = (&\det{}_1\sigma\det{}_{12}\sigma, \det{}_2\sigma\det{}_{12}\sigma, \det{}_1\sigma\det{}_{13}\sigma, \det{}_3\sigma\det{}_{13}\sigma, \det{}_2\sigma\det{}_{23}\sigma,\\ &\det{}_3\sigma\det{}_{23}\sigma, \det{}_2\sigma\det{}_{13}\sigma + \det{}_1\sigma\det{}_{23}\sigma, \det{}_3\sigma\det{}_{12}\sigma - \det{}_1\sigma\det{}_{23}\sigma).\end{aligned}$$

hi đó ma trận A được tạo bởi các hàng là A_σ với $\sigma \in T_3'$ là ma trận vuông bậc 8 và $\det A = 1$. ừ đây ta suy ra rằng tập $\{\psi(\sigma) : \sigma \in T_3'\}$ là độc lập tuyến tính trong $H_{(1,1)}$. Lúc này một tính án về chiều hàm ý $\psi : F_2[T_3'] \cong H_{(1,1)} = U_{(1,1)}$. Từ đây khẳng định i) của định lý 1.2 được ứng minh.

3.3. Chứng minh khẳng định ii) của Định lý 1.2: Như trong chứng minh của Bổ đề 3.1 định nghĩa ánh xạ tuyến tính $\eta : H^4_{(1,0)}H_{(1,1)} \longrightarrow P_4$ bởi $\eta(u^4v) = uv$. Hiển nhiên η là $F_2[GL_3]$ ng cấu. Vì $H^2_{(1,0)}H_{(0,1)}$ là $F_2[GL_3]$ mô đun con của $\mathrm{im}\eta = H_{(1,0)}H_{(1,1)}$ do đó $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)}$ có ân tử hợp thành đẳng cấu với $H^2_{(1,0)}H_{(0,1)}$. Mặt khác $H^2_{(1,0)}H_{(0,1)} \cong H_{(1,0)}H_{(0,1)} = H_{(1,1)}$. $H_{(1,1)}$ là xạ ảnh (theo i) của Định lý 1.2) nên $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)}$ chứa một hạng tử trực tiếp xạ h U đẳng cấu với $H_{(1,1)}$. Như đã đề cập trong §1, L_3 là bất biến của nhóm GL_3. Do đó $H_{(1,0)} \cong H_{(1,0)}$ và là $F_2[GL_3]$ mô đun con của $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)}.L_3H_{(1,0)}$ và U là các mô đun bất ả quy không đẳng cấu nên $L_3H_{(1,0)} \cap U = \{0\}$. Đối với một đại số nhóm một mô đun là xạ h nếu và chỉ nếu nó nội xạ (xem [1], 58.14) vì thế U là nội xạ. Do đó $L_3H_{(1,0)}$ được chứa trong $[GL_3]$ phần bù W của U trong $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)}$. Mặt khác $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)} \cong H_{(1,0)} \otimes H_{(1,1)}$ (theo bổ 3.1) là xạ ảnh vì $H_{(1,1)}$ xạ ảnh. Do đó $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)}$ là nội xạ và hàm ý rằng W cũng nội xạ. thế bao nội xạ của $H_{(1,0)}$ đẳng cấu với mô đun con của W (xem [1], 57.13). Vì $\dim H_{(1,0)} = 3$, m $H_{(1,1)} = \dim U = 8$ do đó $\dim W = 16$. Mặt khác bao nội xạ của $H_{(1,0)}$ chính là mô đun không phân tích được chính $P(H_{(1,0)})$ và $\dim P(H_{(1,0)})$ là bội số của số phần tử của 2 nhóm con Sylow T_3 của GL_3 (xem[1], 65.17). Do đó $\dim P(H_{(1,0)})$ bằng 8 hay 16. Giả sử $\dim P(H_{(1,0)}) = 8$. Chú ý rằng $H_{(1,0)} \cong H^2_{(1,0)} \leq P_2$, P_2 là mở rộng cốt yếu của $H^2_{(1,0)}$ nên tồn tại mô đun con V của $P(H_{(1,1)})$ đẳng cấu với P_2 chứa $H_{(1,0)}$ và $\dim V = \dim P_2 = 6$ (xem [1], 57.12). Mặt khác theo ([1], 54.11) tồn tại mô đun con cực đại V' của $P(H_{(1,0)})$ sao cho $H_{(1,0)} \leq V \leq V' \leq P(H_{(1,0)})$ và $P(H_{(1,0)})/V' \cong H_{(1,0)}$. Điều này không thể xảy ra vì $\dim V = 6$, $\dim H_{(1,0)} = 3$. Do đó $\dim P(H_{(1,0)}) = 16$. Nói cách khác $P(H_{(1,0)}) \cong W$ và khẳng định ii) của Định lý 1.2 được chứng minh.

3.4. Khẳng định iii) được chứng minh tương tự với chứng minh khẳng định ii).

Trước khi chứng minh khẳng định iv), ta cần bổ đề sau:

3.5. Bổ đề. Ký hiệu 1_{GL_3} là biểu diễn tầm thường một chiều. Khi đó

$$H_{(1,0)} \otimes H_{(0,1)} \cong 1_{GL_3} \oplus H_{(1,1)}.$$

Chứng minh: Như trong chứng minh của Bổ đề 3.1 ta định nghĩa ánh xạ tuyến tính $\eta : H^4_{(1,0)}H_{(0,1)} \longrightarrow H_{(1,0)}H_{(0,1)} = H_{(1,1)}$ bởi $\eta(u^4v) = uv$. Hiển nhiên η là $F_2[GL_3]$ đồng cấu và là toàn ánh. $\mathrm{Ker}\,\eta$ là không gian véc tơ một chiều sinh bởi L_3. L_3 là $[GL_3]$ bất biến do đó $\mathrm{Ker}\,\eta \cong 1_{GL_3}$. Mặt khác $H^2_{(1,0)}H_{(0,1)}$ là $F_2[GL_3]$ mô đun con của $\mathrm{im}\,\eta = H_{(1,0)}H_{(1,1)}$ do đó $H^4_{(1,0)}H_{(1,1)}$ có nhân tử hợp thành đẳng cấu với $H^2_{(1,0)}H_{(0,1)}$. Mặt khác $H_{(1,1)}$ là xạ ảnh nên $H^4_{(1,0)}H_{(0,1)} \cong 1_{GL_3} \oplus H_{(1,1)}$. Vì $H^4_{(1,0)}H_{(0,1)} \cong H_{(1,0)} \otimes H_{(0,1)}$ nên bổ đề được chứng minh.

3.6. Chứng minh khẳng định iv): Như trong chứng minh của bổ đề 3.1 ta định nghĩa ánh xạ tuyến tính $\eta : H^4_{(1,1)}H_{(1,1)} \longrightarrow P_6$ bởi $\eta(u^4v) = uv$. Hiển nhiên η là $F_2[GL_3]$ đồng cấu. Vì $H_{(1,1)} \cong H^2_{(1,1)}$ là mô đun con của $\mathrm{im}\,\eta = H_{(1,1)}H_{(1,1)}$ và $H_{(1,1)}$ là xạ ảnh nên trong $H^4_{(1,1)}H_{(1,1)}$ chứa một hạng tử trực tiếp $V_1' \cong H_{(1,1)}$ sao cho $V_1' \cap \mathrm{Ker}\eta = \{0\}$. Vì L_3, $[023]$ là GL_3 bất biến nên trong $\mathrm{Ker}\,\eta$ ta có các $F_2[GL_3]$ mô đun sau:

$$W_2 = [023](H^4_{(1,0)}H_{(0,1)}), \quad W_3 = L_3(H^4_{(0,1)}H_{(1,0)}).$$

Vì $[023] = L_3Q_{3,1}$ với $Q_{3,1} = x_1^2V_2^2 + V_3(x_1^2 + V_2)$ ta viết lại $W_2 = L_3Q_{3,1}(H^4_{(1,0)}H_{(0,1)})$. Từ đó dễ thấy rằng $W_2 \neq W_3$. Mặt khác theo chứng minh của bổ đề 3.5 ta có:

$$W_2 = [023]\langle L_3\rangle \oplus [023]V_2'$$

với $\langle L_3\rangle$ là mô đun con một chiều sinh bởi L_3, V_2' là mô đun con xác định trong $H^4_{(1,0)}H_{(0,1)}$ và $V_2' \cong H_{(1,1)}$. Tương tự

$$W_3 = L_3\langle[023]\rangle \oplus L_3V_3'$$

với $\langle[023]\rangle$ là mô đun con một chiều sinh bởi $[023]$, V_3' là mô đun con xác định trong $H^4_{(0,1)}H_{(1,0)}$ và $V_3' \cong H_{(1,1)}$. Do $W_2 \neq W_3$ ta suy ra $[023]V_2' \neq L_3V_3'$ và chúng bất khả quy nên có giao bằng không. Chú ý rằng $[023]V_2' \cong L_3V_3' \cong H_{(1,1)}$ và $H_{(1,1)}$ cũng là nội xạ nên trong sự phân tích $H^4_{(1,1)}H_{(1,1)} \cong H_{(1,1)} \oplus H_{(1,1)}$ thành các hạng tử trực tiếp không phân tích được định lý Krull Schmidt chứng tỏ rằng có 3 hạng tử đẳng cấu với $H_{(1,1)}$. Ta cũng có $H_{(1,0)} \otimes H_{(1,1)} \cong P(H_{(1,0)}) \oplus H_{(1,1)}$. Do đó

$$H_{(0,1)} \otimes H_{(1,0)} \otimes H_{(1,1)} \cong H_{(0,1)} \otimes P(H_{(1,0)}) \oplus H_{(0,1)} \otimes H_{(1,1)},$$
$$(H_{(1,1)} \oplus 1_{GL_3}) \otimes H_{(1,1)} \cong H_{(0,1)} \otimes P(H_{(1,0)}) \oplus P(H_{(0,1)}) \oplus H_{(1,1)}$$

i bổ đề 3.5 và khẳng định iii) của định lý 1.2

$$H_{(1,1)} \otimes H_{(1,1)} \oplus H_{(1,1)} \cong H_{(0,1)} \otimes P(H_{(1,0)}) \oplus P(H_{(0,1)}) \oplus H_{(1,1)}.$$

Định lý Krull Schmidt chứng tỏ rằng trong sự phân tích $H_{(1,1)} \otimes H_{(1,1)}$ ở trên thành các ıg tử trực tiếp không phân tích được có hạng tử X_1 đẳng cấu với $P(H_{(0,1)})$. Tương tự trong phân tích $H_{(1,1)} \otimes H_{(1,1)}$ ở trên thành các hạng tử trực tiếp không phân tích được có hạng tử đẳng cấu với $P(H_{(1,0)})$. Đặt.

$$M = V_1' \oplus [023]V_2' \oplus L_3V_3' \oplus X_1 \oplus X_2.$$

i đó mô đun con hoàn toàn khả quy cực đại của M là

$$M' = V_1' \oplus [023]V_2' \oplus L_3V_3' \oplus H_1 \oplus H_2,$$

i H_1, H_2 lần lượt là các mô đun con cực tiểu duy nhất của X_1, X_2 đẳng cấu với $H_{(0,1)}$, $H_{(1,0)}$. mô đun con một chiều sinh bởi $L_3[023]$ đẳng cấu với 1_{GL_3}, có giao với M' bằng không nên có o với M bằng không. Do đó nó được chứa trong $F_2[GL_3]$ phần bù của M trong $H^4_{(1,1)}H_{(1,1)}$. $_{1,1)}H_{(1,1)}$ là xạ ảnh nên nó cũng là nội xạ. Vì thế Y là nội xạ nên suy ra rằng Y là xạ ảnh. Mặt ıc $\dim Y = 8$ và bằng số phần tử của T_3 nên Y không phân tích được (xem[1], 65. 17). Do đó $\cong P(1_{GL_3})$. Khẳng định iv) của định lý 1.2 được chứng minh và định lý 1.2 được chứng minh.

3.7. Chứng minh tiếp định lý 1.1: Vì các mô đun trong định lý 1.1 là bất khả quy tuyệt , ta có:

$$\begin{aligned}\dim F_2[GL_3] &\geq \sum_{0\leq\beta_1,\beta_2\leq 1} \dim H_{(\beta_1,\beta_2)} \dim P(H_{(\beta_1,\beta_2)})\\ &\geq 8 + 2(3.16) + 8.8 = \dim F_2[GL_3].\end{aligned}$$

u này chứng tỏ rằng đẳng thức phải xảy ra tại các đánh giá của chúng ta và do đó các mô đun trong định lý 1.1 là tập đầy đủ. Vì vậy định lý 1.1 được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

C. W. Curtis and I. Reiner, "Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras", Interscience, New York, 1962.

L. E. Dickson, On binary modylar groups and their invariants, Bull. Amer. Math. **13** (1971), *426-438*.

D. J. Glover, A Study of Certain Modular Representations, Journal of Algebra **51** (1978), *425-475*.

Huỳnh Mùi, Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA. Math. **22** (1975), *319-369*.

G. James and A. Kerber, "The Representation Theory of the Symmetric Group, Addison - Wesley 1981.

N. E. Steenrod, "Cohomology operations", Princeton University Press (1962).

THE MODULAR REPRESENTATION OF GROUP $GL(3, F_2)$

Ton Thất Tri
Faculty of mathematics, Hue University

Let a be and algebra over the field F. The aim of this paper is to determine the complete se of irreducible modules the principal indecomposable modules of the algebra A. Up to now, ther is still not a general method to determine the principal indecomposable modules of A.

In this paper, by using Dickson's invariants we construct the complete set of irreducibl modules of the group algebra $F_2[GL(3, F_2)]$. After that by identifying the tensor product of tw irreducible modules as a submodule of the commutative polynomial algebra, in which there is module being projective. Applying the Dickson's invariants we decompose the above submodul into a direct sum of submodules. From this we obtain the pricipal indecomposable modules of th group algebra $F_2[GL(3, F_2)]$.