TẠP CHÍ KHOA HỌC No 7 - 1994

VỀ HẠNG TỬ CAMPBELL - SELICK $M_n(0)$

Nguyễn Gia Định
Đại học Tổng hợp Huế

1. GIỚI THIỆU

Gọi $R(Z/2)^n_+$ là không gian phân loại của 2 nhóm Aben sơ cấp $(Z/2)^n$ cùng với một điểm gốc rời $H = H^*(B(Z/2); F_2)$ được xem như là một môđun trên đại số Steenrod mod - 2A. Ký hiệu $H^{\otimes n}$ là đối đồng đều thu gọn của $B(Z/2)^n_+$, khi đó $H^{\otimes n} \cong F_2[t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}]$ với $Sq^1(t_k) = t_k^2$.

Trong [1], Campbell và Selick đưa ra một phân tích rất tự nhiên của $H^{\otimes n}$ thành một tổng trực tiếp của $(2^n - 1)A$ - môđun, gọi là các hạng tử trọng lượng, $M_n(j)$, với $j \in Z/(2^n - 1)$. Các hạng tử này rât dễ dàng làm việc vì chúng có các cơ sở gồm những đơn thức trong một đại số hữu hạn sinh nào đó. Đặc biệt $M_n(0)$ là một A - đại số mà có thể được mô tả như là các bất biến của $H^{\otimes n}$ dưới một tác động của nhóm $Z/(2^n - 1)$: Phân tích này cho $H^{\otimes n}$ cấu trúc của một $M_n(0)$ - đại số phân bậc có bổ sung.

Kết quả chính của bài báo này là đưa ra một tập sinh tối thiểu của đại số $M_n(0)$.

2. HẠNG TỬ CAMPBELL - SELICH $M_n(0)$

Trong F_{2^n} chọn một phần tử ω sao cho ω sinh ra nhóm cyclic gồm các phần tử khả đảo trong F_{2^n} và $\{\omega, \phi(\omega), \ldots, \phi^{n-1}(\omega)\}$ tạo thành một cơ sở cua F_{2^n} trên F_2 ([2]), trong đó $\phi(a) = a^2$ là tự đẳng cấu Frobenius. Gọi $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ là đa thức tối thiểu của ω. Gọi

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

là $n \times n$ ma trận trên F_2 biểu diễn phép nhân với ω theo cơ sở $\{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$. Xem T như là một phép biến đổi tuyến tính trên không gian véctơ $F_{2^n} < t_0, \ldots, t_{n-1} >$. Các giá trị riêng của T là ω, $\omega^2, \ldots, \omega^{2^{n-1}}$ xác định trên F_{2^n}. Một cơ sở gồm các véctơ riêng khác không của T, $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ có thể được chọn với $T(x_k) = \omega^{2^k} x_k$ và $x_k = \phi(x_{k-1})$ (ở đây ϕ có tác động tầm thường lên các t). Gọi B là ma trận trong $GL_n(F_{2^n})$ biểu diễn các x theo các t, $B : F_{2^n}\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \to F_{2^n}\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle$, và chú ý rằng BTB^{-1} là ma trận chéo diag$(\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{2^{n-1}})$ trong $GL_n(F_{2^n})$. Mở rộng B một cách nhân tính đến đại số đa thức thì có

$$B : F_{2^n}[t_0, \ldots, t_{n-1}] \cong F_{2^n}[x_0, \ldots, x_{n-1}].$$

Tác giả muốn cám ơn thầy hướng dẫn là giáo sư Huỳnh Mùi đã tận tình giúp đỡ trong việc hoàn thành bài báo này

Cho $F_2[t_0, \dots, t_{n-1}]$ cấu trúc A - đại số thông thường $sq^1(t_i) = t_i^2$ và mở rộng đến $_{2^n}[t_0, \dots, t_{n-1}]$ sao cho tác động của A là F_{2^n} - tuyến tính. Tác động A - môđun trên các được cho bởi $Sq^1(x_i) = x_{i-1}^2$ trong đó chỉ số dưới lấy theo modulo n. Áp dụng công thức artan, $F_2[x_0, \dots, x_{n-1}]$ là một A-môđun con của $F_{2^n}[t_0, \dots, t_{n-1}]$. Trong [1], Campbell và Selick ã chứng minh rằng

$$F_2[x_0, \dots, x_{n-1}] \cong F_{2^n}[t_0, \dots, t_{n-1}] \quad \text{(đẳng cấu A-môđun)}.$$

Đặt $M_n = F_2[x_0, \dots, x_{n-1}]$ và định nghĩa các trọng lượng $w(m)$ trong $Z/(2^n - 1)$ đối với các ơn thức m trong M_n bởi $w(1) = 0$, $w(x_k) = 2^k$, và $w(yz) = w(y) + w(z)$. Gọi $M_n(j)$ là không .an con của M_n nhận các đơn thức có trọng lượng j làm cơ sở. Vì Sq^1 bảo toàn trọng lượng ên có một phân tích.

$$M_n = \bigoplus_{j \in Z/(2^n-1)} M_n(j)$$

hư là các A - môđun. Phân tích này cho một cấu trúc $M_n(0)$ - đại số phân bậc có bổ sung trên I_n. Đẳng cấu $M_n \cong H^{\otimes n}$ là một đẳng cấu A-môđun chứ không phải là đẳng cấu vành. Nó cảm nh một đẳng cấu A-môđun (không phải vành) $M_n(0) \cong H^*(B(Z/2)_+^n)^{F_{2^n}^*}$, trong đó:

$$F_{2^n}^* = \langle T \rangle \subseteq GL_n(F_2) \quad ([1]).$$

Vì thế

$$M_n(0) \cong f_0 F_2[t_0, \dots, t_{n-1}], \quad \text{(đẳng cấu A-môđun)}, \quad f_0 = \sum_{i=0}^{2^n-2} T^i.$$

Tuy nhiên khi hạn chế đến các bất biến Dickson, ánh xạ này là nhân tính ([5], 3.9). Do đó $I_n(0)$ chứa một đại số con đa thức như $H^*(B(Z/2)_+^n)^{F_{2^n}^*}$ chứa đại số Dickson.

3. KẾT QUẢ CHÍNH

Mỗi đơn thức trong $M_n(0)$ có dạng $x = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, với

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + \dots + 2^{n-1}\alpha_{n-1} \equiv 0 \bmod (2^n - 1).$$

Đặt

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

có tác động của M lên x là $M x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} = x_0^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} \dots x_{n-2}^{\alpha_{n-1}} x_{n-1}^{\alpha_0}$. Đơn thức có bậc nhỏ ıất trong $M_n(0) = M_n(0)/F_2.1$ là $x_0 x_1 \dots x_{n-1}$ ([4], 2.8).

Định lý 3.1. Đại số $M_n(0)$ có một tập sinh tối thiểu là

$$X = \left\{ M^k x_0^{2^n-1-\sum_{i=1}^{n-1} 2^i\alpha_i} x_1^{\alpha_1}\dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \middle| 0 \le k \le n-1, \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1}\alpha_i \le 2^{n-1}-1 \right\}.$$

Chứng minh: Chứng minh bằng quy nạp theo bậc của các đơn thức. Xét đơn thức bất kỳ $x \in M_n(0)$. Giả sử x chứa $r+1$ nhân tử phân biệt $x_i (0 \le r \le n-1)$. Khi đó trong tập $\{M^k x | 0 \le k \le n-1\}$ có $r+1$ phần tử chứa nhân tử x_0. Tồn tại k sao cho $M^k x = x_0^{\alpha_0} x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}}, 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n-1$, là một trong các phần tử đó có $\alpha_0 + \sum_{j=1}^{r} 2^{i_j}\alpha_{i_j} = (2^n-1)\ell$ là nhỏ nhất.

$$\sum_{j=1}^{r} 2^{i_j-1}\alpha_{i_j} \le 2^{n-1}-1 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{r} 2^{i_j-1}\alpha_{i_j} \le 2^{n-1}-2^{i_1-1}.$$

Nếu $\sum_{i=1}^{r-1} 2^{i_j-1}\alpha_{i_j} \le 2^{n-1}-2^{i_1-1}$, thì $M^k x = x_0^{2^n-1-\sum_{i=1}^{r} 2^{i_j}\alpha_{i_j}} x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}} x_0^{(2^n-1)(\ell-1)}$, và

$$x = M^{n-k} x_0^{2^n-1-\sum_{j=1}^{r} 2^{i_j}\alpha_{i_j}} x_{i_1}^{\alpha_{i-1}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}} (M^{n-k} x_0^{(2^n-1)})^{(\ell-1)}.$$

Đơn thức thứ nhất thuộc X, đơn thức thứ hai thuộc $\langle X \rangle$. Vì thế $x \in \langle X \rangle$.

Nếu $\sum_{j=1}^{r} 2^{i_j-1}\alpha_{i_j} > 2^{n-1}-2^{i_j-1}$, thì $M^{k+i_1}x = x_0^{\alpha_{i_1}} x_{i_2-i_1}^{\alpha_{i_2}} \dots x_{i_r-i_\ell}^{\alpha_{i_r}} x_{n-i_1}^{\alpha_0}$ có

$$\alpha_{i_1} + 2^{i_0-i_1}\alpha_{i_2} + \dots + 2^{i_r-i_1}\alpha_{i_r} + 2^{n-i_1}\alpha_0 = \frac{(2^n-1)\ell - \alpha_0}{2^{i_1}} + 2^{n-i_1}\alpha_0 =$$

$$= \frac{(2^n-1)(\ell+\alpha_0)}{2^{i_1}} \ge (2^n-1)\ell.$$

Điều này kéo theo $\alpha_0 \ge (2^{i_1}-1)\ell$, và vì $\ell \ge 1$, ta có $\alpha_0 \ge 2^{i-1}-1$. Bằng cách chọn α'_{i_j} sao cho $1 \le \alpha'_{i_j} \le \alpha_{i_j}$, $1 \le j \le r$, và $\sum_{j=1}^{r} 2^{i_j-1}\alpha'_{i_j} = 2^{n-1}-2^{i_1-1}$, ta có:

$$M^k x = x_0^{2^{i_1}-1} x_{i_1}^{\alpha'_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha'_{i_r}} x_0^{\alpha_0-(2^{i_1}-1)} x_{i_1}^{\alpha_{i_1}-\alpha'_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}-\alpha'_{i_r}} \quad \text{và}$$

$$x = M^{n-k} x_0^{2^{i_1}-1} x_{i_1}^{\alpha'_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha'_{i_r}} M^{n-k} x_0^{\alpha_0-(2^{i_1}-1)} x_{i_1}^{\alpha_{i_1}-\alpha'_{i_1}} \dots x_{i_r}^{\alpha_{i_r}-\alpha'_{i_r}}.$$

Đơn thức thứ nhất thuộc X, đơn thức thứ hai thuộc $\langle X \rangle$ bởi quy nạp. Vì thế $x \in \langle X \rangle$.

Vì $2^n - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} 2^i\alpha_i + 2\alpha_1 + \dots + 2^{n-1}\alpha_{n-1} = 2^n - 1$, tập X là tối thiểu. Định lý được chứng minh.

Cho $Z/n = \langle \Phi \rangle$ tác động lên $Z/(2^n-1)$ bởi $\Phi(i) = 2i$. Gọi J_i là quỹ đạo chứa i, và I là tập hợp chứa một phần tử từ mỗi quỹ đạo, và $I^* = I - \{0\}$. Gọi z_i là số mũ k dương nhỏ nhất sao cho $2^k i \equiv i (\text{mod}(2^n-1))$. Khi đó z_i là bản số của j_i, và là một ước của n.

Gọi $F(M_n(0);t)$ là chuỗi Poincaré của $M_n(0)$. Ta có định lý sau.

nh lý 3.2.

$$F(M_n(0);t) = \frac{(-1)^n}{2^n - 1} \sum_{d|(2^n-1)} \sum_{\substack{i \in I \\ or\ d(\tilde{\omega}^i)=d}} \frac{z_i}{[(t - \tilde{\omega}^i) \ldots (t - \tilde{\omega}^{2^{z_i - z_j}})]^{n/z_i}},$$

ng đó $\tilde{\omega}$ là một căn thứ $(2^n - 1)$ nguyên thủy của đơn vị trong C.

Đặc biệt, nếu $2^n - 1$ là một số nguyên tố, ta có.

$$(M_n(0);t) = -\frac{1}{2^n - 1}\left[\frac{1}{(t-1)^n} + \frac{(2^n - 2)t^{2^n-2-n} - \sum_{k=1}^{2^n-3-n} \binom{2^n-2-n}{k} t^{2^n-2-n-k} - (2^n - 2)}{t^{2^n-2} + t^{2^n-3} + \cdots + t + 1}\right]$$

C h ứ n g m i n h : Công thức đầu tiên kéo theo từ ([4]; 5.1). Đặc biệt, khi $2^n - 1$ là một nguyên tố, n cũng là một số nguyên tố. Khi đó $z_i = n$, với mỗi $i \in I^*$, điều này kéo theo $| = \frac{2^n - 2}{n}$. Vì mỗi $\tilde{\omega}_i$, $1 \le i \le 2^n - 2$, là một căn thứ $(2^n - 1)$ nguyên thủy của đơn vị, $\sum_{1}^{-2} \tilde{\omega}^i = -1$ và $\prod_{i=1}^{2^n-2}(t - \tilde{\omega}_i) = \frac{t^{2^n-1} - 1}{t - 1}$. Khi đó.

$$F(M_n(0);t) = \frac{-1}{2^n - 1}\left[\frac{1}{(t-1)^n} + \sum_{i \in I^*} \frac{n}{\prod_{j=0}^{n-1}(t - \tilde{\omega}^{i2^j})}\right]$$

$$= \frac{-1}{2^n - 1}\left[\frac{1}{(t-1)^n} + n \sum_{i_0 \in J^*} \prod_{\substack{i \in I^* \\ i \neq i_0}} \prod_{j=0}^{n-1} (t - \tilde{\omega}^{i2^j})/(t^{2^n-2} + \cdots + t + 1)\right].$$

Ví dụ 3.3.

1) $F(M_2(0);t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{(t-1)(t^3 - 1)}$,

2) $F(M_3(0);t) = -\dfrac{t^8 - 2t^5 + t^4 + t^3 - 2t + 1}{(t-1)^2(t^7 - 1)}$,

3) $F(M_4(0);t) = \frac{1}{15}(15t^{16} - 22t^{15} + 15t^{14} - 15t^{13} + 21t^{12} + 15t^{11} - 23t^{10} + 9t^9 + 15t^8 +$
$+9t^7 - 23t^6 + 15t^5 + 21t^4 - 15t^3 + 15t^2 - 22t + 15)/(t-1)^2(t^3 - 1)(t^{15} - 1)$

nh lý 3.4. $M_2(0)$ là đại số $F_2[Q_{2,0}, Q_{2,1}, Y]/(Q_{2,1}^3 + Q_{2,0}Y + Y^2)$ trong đó $Q_{2,0}$, $Q_{2,1}$ là các biến Dickson và $Y = x_1^3$.

C h ứ n g m i n h : Đại số Dickson trong trường hợp $n = 2$ là

$$F_2[t_0, t_1]^{GL_2} = F_2[Q_{2,0}, Q_{2,1}],$$

ng đó $Q_{2,0} = t_0^2 t_1 + t_0 t_1^2$ và $Q_{2,1} = t_0^2 + t_0 t_1 + t_1^2$ ([3]). Ngoài ra, trong trường hợp này

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

khi đó

$$x_0 = t_0 + \omega t_1$$
$$x_1 = t_0 + \omega^2 t_1$$

Điều này kéo theo $x_0 x_1 = Q_{2,1}$, $x_0^3 + x_1^3 = Q_{2,0}$. Từ định lý 3.1 ta có $M_2(0) = \langle x_0x_1, x_0^3, x_1^3\rangle =$ $\langle x_0x_1, x_0^3 + x_1^3, x_1^3\rangle$.

Dễ dàng có được

$$Q_{2,1}^3 = Q_{2,0}Y + Y^2.$$

Chuỗi Poincaré của $F_2[Q_{2,0}, Q_{2,1}, Y]/(Q_{2,1}^3 + Q_{2,0}Y + Y^2)$ là $\dfrac{(1-t^6)}{(1-t^2)(1-t^3)^2}$, nó bằng $F(M_2(0); t)$. Điều này hoàn thành chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. H. E. A. Campbell and P. S. Selick, Polynomial algebras over the Steenrod algebra, Comment Math., Helv., 65 (1990), 171-180.
2. H. Davenport, Bases for finite fields. J. London Math. Soc. 43 (1968), 21-39.
3. L. E. Dickson, A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem, Trans. Am. Math. Soc. 12 (1911), 75 - 98.
4. J. C. Harris, On certain stable wedfe summands of $B(Z/p)^n_+$, Canad. J. Math. 44 (1) (1992) 104-118.
5. J. C. Harris T. J. Hunter and R. J. Shank, Steerod algebra module maps from $H^*(B(Z/p)^n)$ $H^*(B(Z/p)^s)$. Proceedings of the AMS. 112 (1) (1991).

ON THE CAMPBELL - SELICK SUMMAND $M_n(0)$

Nguyen Gia Dinh
Faculty of Mathematics, Hue University

Let $(Z/2)^n$ be the elementary abelian 2-group of rank n. We denote by $H^{\otimes n}$ the mod 2 cohomology of the classifying space $B(Z/2)^n$ and it can be considered as a module over the Steenrod algebra A. Campbell and Selick have given a natural decomposition of $H^{\otimes n}$ into a direct sum of $(2^n - 1)$ A-modules $M_n(j)$ of weight j for $j \in Z/(2^n - 1)$. Especially, $M_n(0)$ is an A-algebra with can be described as the invariants of $H^{\otimes n}$ under the action of $Z/(2^n - 1)$ (the cyclic group of order $(2^n - 1)$. Note that the algebra $M_n(0)$ contains the Dickson invariants.

In this paper, we give a minimal set of generators of the algebra $M_n(0)$ and describe explicitly the algebra $M_2(0)$. Moreover, we also describe Poincaré series of the algebra $M_n(0)$.