P CHÍ KHOA HỌC TRƯỜNG ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI. SỐ 1 – 1990

SUPREMUM CỦA TỔNG BỘI CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP VỚI CÁC HẰNG SỐ CHUẨN HÓA DẠNG

$$(n_1^{1/p_1} + \ldots + n_k^{1/p_k})^{1/h}$$

NGUYỄN VĂN GIANG

Mở đầu và một vài kết quả chuẩn bị

Giả sử $N^k(k > 1)$ là không gian các vectơ k chiều với các tọa độ nguyên
ng: $N^k = \{n = (n_1 \ldots, n_k), n_1, \ldots, n_k \in N\}$ Thứ tự trong N^k là thứ tự thông
ng: $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in N^k$, $\mathbf{m} \leqslant \mathbf{n} \Leftrightarrow m_1 \leqslant n_1, \ldots, m_k \leqslant n_k$.

Xét họ $\{X, X(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in N^k\}$ các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố. Ký hiệu
là các tổng riêng của chúng:

$$S(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m} \leqslant \mathbf{n}} X(\mathbf{m}) = \sum_{m_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{m_k=1}^{n_k} X(m_1, \ldots, m_k)$$

Như đã biết, với các hằng số chuẩn hóa «nhân tính» dạng

$$b(\mathbf{n}) = (n_1 \ldots n_k)^{1/r}, \; 0 < r < 2$$

toán xem xét mối liên hệ giữa các moment của X với các moment của các
lượng

$\sup\limits_{\mathbf{n}} | b^{-1}(\mathbf{n}) X(\mathbf{n}) |^p$, và $\sup\limits_{\mathbf{n}} | b^{-1}(\mathbf{n}) S(\mathbf{n}) |^p$, $p \geqslant r$ đã được nhiều tác giả

n tâm nghiên cứu, xem, chẳng hạn, [1], [2], [3], [4], [6], [10], [12], [13], [14].

Trong trường hợp một chỉ số ($k = 1$) bài toán đã được giải quyết khá trọn
, lớp các hằng số chuẩn hóa b_n là khá tổng quát (xem, ví dụ, [10]). Còn
ng trường hợp nhiều chỉ số ($k > 1$), kết quả tổng quát nhất cho đến nay, theo
chúng tôi biết, là kết quả của Gut [6] sau đây:

Giả sử $\{X, X(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in N^k\}$ là họ các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố với
$= 0$. Với $0 < r < 2$, $p \geqslant r$, các phát biểu sau đây là tương đương:

$$E|X|^p (\log^+ |X|)^k < \infty \text{ nếu } p = r \text{ và } E|X|^p < \infty \text{ nếu } p > r;$$

$$E \sup_{\mathbf{n}} \left| \frac{X(\mathbf{n})}{(n_1 \ldots n_k)^{1/r}} \right|^p < \infty,$$

$$E \sup_{\mathbf{n}} \left| \frac{S(\mathbf{n})}{(n_1 \ldots n_k)^{1/r}} \right|^p < \infty.$$

Trong bài này chúng tôi sẽ mở rộng kết quả trên đây cho trườ
hằng số chuẩn hóa có dạng « cộng tính » sau đây:

$$b(\mathbf{n}) = \left(n_1^{1/p} + \ldots + n_k^{1/p_k}\right)^{1/h}, \quad p_1, \ldots, p_k, h > 0, (p_1 + \ldots + p_k)$$

Trước hết chúng ta chứng minh hai bổ đề sẽ có ích về sau.

Bổ đề 1. *Giả sử* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *là các số thực bất kỳ,* $\alpha = \max\{\alpha_i\}$; p

$$s = \sum_{i:\alpha_i > 0} \alpha_i p_i, \; r = \mathrm{Card}\,\{i : i = , \ldots, k, \alpha_i = 0\}.$$ *Với mỗi* $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{n_1^{1/p_1} + \ldots + n_k^{1/p_k} \leqslant x} n_1^{\alpha_1 - 1} \ldots n_k^{\alpha_k - 1}.$$

Khi đó

a) Nếu $\alpha \leqslant 0$ *thì*

$$f(x) \leqslant C(\log^+ x)^r.$$

b) Nếu $\alpha > 0$ *thì*

$$f(x) \leqslant Cx^s(\log^+ x)^r.$$

Ở đây $\log^+ x = \max\{1, \log x\}$.

Chứng minh. Ta có bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$\sum_{n_1^{1/p_1} + \ldots + n_k^{1/p_k} \leqslant x} n_1^{\alpha_1 - 1} \ldots n_k^{\alpha_k - 1} \leqslant \sum_{n_1 \leqslant x^{p_1}} n_1^{\alpha_1 - 1}$$

$$\ldots \sum_{n_k \leqslant x^{p_k}} n_k^{\alpha_k - 1}$$

Từ đó dễ dàng nhận được kết luận của bổ đề.

Bổ đề 2. *Giả sử* $(E, \|.\|)$ *là một không gian Banach thực.* *Giả*
$\mathbf{n} \in \mathbf{N}^k\}$ *là một họ các biến ngẫu nhiên độc lập* E *— giá trị.* $\{a(\mathbf{m})\}$,
lập các số thực dương không giảm. Đặt $U(\mathbf{n}) = a^{-1}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{m} \ll \mathbf{n}} Y$

$= \sup_{\mathbf{n}} \|U(\mathbf{n})\|$, $W = \sup_{\mathbf{n}} \|a^{-1}(\mathbf{n})\, Y(\mathbf{n})\|$, *và giả sử* $V < \infty$ *hầu chắc c*

$W < \infty$ *hầu chắc chắn và nếu* $E\,W^p < \infty$ *với* p *nào đó,* $0 < p < \infty$, *th*

Bổ đề này mở rộng một kết quả của Gut [6], (bổ đề 2.2, tr. 20
chứng minh bằng một phương pháp giống hệt.

Các kết quả

Trong cả phần này ta chỉ xét họ $\{X, X(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{N}^k\}$ các biến ngẫu
lập cùng phân bố với kỳ vọng bằng không, $b(\mathbf{n})$ là các hằng số chuẩn

$$b(\mathbf{n}) = (n_1{}^{1/p_1} + \ldots + n_k{}^{1/p_k})^{1/h},$$

$$p_1, \ldots, p_k, h > 0, \; 0 < (p_1 + \ldots + p_k)\, h < 2.$$

Đặt $p = \max\{p_i\}$, $r = \mathrm{Card}\,\{i : i = 1, \ldots, k, p_i = p\}$; $q \geqslant p$

Các kết quả chính của bài báo sẽ được phát biểu trong hai định lý sau đây.

Định lý 1 (i) *Nếu* q > pkh, *thì hai điều kiện sau đây là tương đương*

$$E|X|^q < \infty \tag{1}$$

$$E \sup_n \left| \frac{X(n)}{b(n)} \right|^q < \infty \tag{2}$$

i) *Nếu* q = pkh, *thì điều kiện*

$$E|X|^q (\log^+|X|)^r < \infty \tag{3}$$

éo theo điều kiện

$$E \sup_n \left| \frac{X(n)}{b(n)} \right|^q < \infty \tag{2'}$$

Định lý 2. Với mọi q ⩾ pkh, *điều kiện* (2) *hoặc* (2') *tương đương với điều*
iện

$$E \sup_n \left| \frac{S(n)}{b(n)} \right|^q < \infty \tag{4}$$

Chứng minh định lý 1. Trước hết ta chứng minh từ điều kiện (1) (hoặc 3)
) kéo theo (2) (2').

Đặt $X'(n) = X(n)\, I\,(\,|X(n)| < b(n))$, $X''(n) = X(n) - X'(n)$

Ở đây $I\{\ \}$ ký hiệu hàm chỉ tiêu của tập hợp.

Ta có:

$$E \sup_n \left| \frac{X(n)}{b(n)} \right|^q \leqslant E \sup_n \left| \frac{X'(n)}{b(n)} \right|^q + E \sup_n \left| \frac{X''(n)}{b(n)} \right|^q ,$$

Rõ ràng

$$E \sup_n |b^{-1}(n)\, X'(n)|^q \leqslant 1.$$

Mặt khác, ta có:

$$E \sup_n |b^{-1}(n)\, X''(n)|^q \leqslant \sum_{n \in N^k} b^{-q}(n)\, E\,|X''(n)|^q$$

$$= \sum_{n \in N_k} \frac{1}{b^q(n)} \int_{b(n)}^{\infty} x^q \, dp\,(|X(n)| < x)$$

$$= \sum_{n \in N^k} \frac{1}{b^q(n)} \int_{b(n)}^{\infty} x^q \, dP\,(|X| < x)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j^{-q} a_j \int_{j}^{\infty} x^q \, dP\,(|X| < x), \ (a_j = \mathrm{card}\,\{n : j < b(n) \leqslant j + 1\})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{i}^{i+1} x^q \, dP\,(|X| < x) \sum_{j \leqslant i} a_j\, j^{-q}$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} i^q \, P\,(i \leqslant |X| < i + 1) \sum_{b(n) \leqslant i} b^{-q}(n)$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} i^q P(i \leqslant |X| < i+1) \sum_{b(\mathbf{n}) \leqslant i} n_1^{(1-q/p_1kh)-1} \; n_k^{(1-q/p_k k}$$

(áp dụng bất đẳng thức Cauchy)

$$\leqslant \begin{cases} C \sum_{i=1}^{\infty} i^q P(i \leqslant |X| < i+1) \text{ nếu } q > pkh \\ C \sum_{i=1}^{\infty} i^q P(i \leqslant |X| < i+1) (\log^+ i)^r \text{ nếu } q = pkh \end{cases}$$

(áp dụng bổ đề 1)

$$\leqslant \begin{cases} C\, E\, |X|^q \text{ nếu } q > pkh. \\ C\, E\, |X|^q (\log^+ |X|)^r \text{ nếu } q = pkh. \end{cases}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Bây giờ ta chứng minh rằng trong trường hợp $q > pkh$, thì điều kiện

kéo theo (1)

Hiển nhiên rằng $\sup |X(\mathbf{n})/b(\mathbf{n})|^q \geqslant C\, |X(1)|^q$, nên nếu 2) đúng thì (1)

đúng.

Định lý 1 được chứng minh hoàn toàn.

Chứng minh định lý 2. Trước hết lưu ý rằng theo chứng minh trên

điều kiện

$$E \sup_{\mathbf{n}} \left| \frac{X(\mathbf{n})}{b(\mathbf{n})} \right|^q < \infty$$

sẽ kéo theo $E\, |X|^q < \infty$

với mọi $q \geqslant pkh$. Từ đó theo kết quả của Klesov [11] (hệ quả 5, tr. 919)

$V = N\sup_{\mathbf{n}} |S(\mathbf{n})/b(\mathbf{n})| < \infty$ hầu chắc chắn. Áp dụng bổ đề 2, cùng với giả thiết

suy ra

$$E \sup_{\mathbf{n}} \left| \frac{S(\mathbf{n})}{b(\mathbf{n})} \right|^q < \infty$$

Điều kiện (4) suy ra điều kiện (2) (hoặc (2')) là hiển nhiên do bất đẳn

$$\sup_{\mathbf{n}} |b^{-1}(\mathbf{n})\, X(\mathbf{n})| \leqslant 2^k \sup_{\mathbf{n}} |b^{-1}(\mathbf{n})\, S(\mathbf{n})|$$

Định lý 2 hoàn toàn được chứng minh

Để kết thúc, chúng tôi nêu thêm một hệ quả của các định lý trên.

Hệ quả 1. Với $q > 1$, *các điều kiện sau đây là tương đương* $E\, |X|^q < \infty$

$$E \sup_{\mathbf{n}} \left| \frac{X(\mathbf{n})}{(n_1 + \ldots + n_k)^k} \right|^q < \infty$$

$$E \sup_{\mathbf{n}} \left| \frac{S(\mathbf{n})}{(n_1 + \ldots + n_k)^k} \right|^q < \infty$$

Cuối cùng tác giả xin chân thành cảm ơn GS, TS Nguyễn Duy Tiến đã

kỹ bản thảo và cho nhiều nhận xét bổ ích.

TÀI LIỆU

1. *Burkholder, D. L.*, Successive conditional expectations of an integrable ction, Ann. Math. Statist, 33, 887—893 (1962).

2. *Davis, B*; Stopping rules for S_n/n and the class L log L, Z. Wahr. verw. biete 17, 147—150 (1971),

3. *Gabriel, J.P.*, Martingales with a countable filtering index set. Ann. Pro-). 5,888—898 (19 7).

4. *Gundy, R.F.*, On the Class L log L, martingales and singular integrals dia Math. XXXIII, 109 — 118 (1969)

5. *Gut A.*, Marcinkiewicz laws and convergence rates in the laws of large nbers for random variables with multidimensional indices. Ann. probab. 39 — 482 (1978).

6. *Gut A.*, Moments of the maximum of normed partial sums of random iables with multidimensional indices. Z. Wahr. verw. Gebiete 46, 205 — 220 (1979):

7. *Gut A.*, Convergence rates for probabilities of moderate deviations fo- ns of random variables with multidimensional indices. Ann. Probab. 8, 298— ., (1980).

8. *Gut, A.*, Strong laws for independent identically distributed random varia- s indexed by a sector, Ann. Probab. 11. 569 – 577 (1983)

9 *Hoffmann – Jorgensen. J.*, Sums of independent Banach spase valued ran n variables, Studia Math. LII, 159 – 186 (1974).

10. *Klass M J.*, On stopping rules and the expected supremum of S_n/a_n and $/a_n$. Ann. Probab. 2, 889 — 9 5 (1974)

11. *Klesov O.I.*, Strong law of large numbers for multiple sums of inde- dent identically distributed random variables, Matematicheski Zametki 915 — 930 (1985) (in Russian).

12. *Marcinkiewic J.*, *Zygmund, A.*, Sur les fonctions independentes Fund. th. 29, 60 — 90 (1937).

13 *McCabe, B.J.*, *Shepp, L.A.*, On the supremum of S_n/n, Ann. Math. Statist, 2166 – 2168 (197).

14. *Siegmund, D.*, On moments of the maximum of normed partial sums, n. Math. Statistist 40, 527 – 531 (1969).

15. *Smythe, R.T.*, The sums of independent random variables on the partia- ordered sets. Ann. Probab. 2, 906—917 (1974).

UYEN VAN GIANG

ON THE SUPREMUM OF MULTIPLE SUMS OF INDEPENDENT RANDOM RIABLES WITH NORMALIZING SEQUENCES OF TYPE $(n_1^{1/p_1} + \dots + n_k^{1/p_k})^{1/h}$

Let $\{X, X(n), n \in N^k\}$ be a family of independent identically distributed random iables with $EX = 0$; $S(n)$ their partial sums; $b(n) = (n_1^{1/p_1} + \dots + n_k^{1/p_k})^{1/h}$, $\dots, p_k, h > 0$, $0 < (p_1 + \dots p_k)h < 2$. The paper treats the problem of relating ments of X to moments of $\sup | b^{-1}(n) X(n) |$ and $\sup | b^{-1}(n) S(n) |$.

Khoa Toán Cơ—Tin học
Học Tổng Hợp Hà Nội

Đến tòa soạn
ngày 27-10-1987