TẠP CHÍ KHOA HỌC № 4 - 1990

Phan Văn Hạp,
Lê Đình Định

ĐẠO HÀM TRUNG BÌNH VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ

MỞ ĐẦU

Trong nhiều bài toán thực tế, thường gặp trường hợp hàm cần tìm gián đoạn, khô hoặc miền được xét có biên không trơn. Để khắc phục các trường hợp này, chúng tô khái niệm đạo hàm trung bình và xét sự ứng dụng của nó trong bài toán vật lý cho phươ Laplaxơ.

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM TRUNG BÌNH

1.1 - Định nghĩa : a) $F\ :\ \Omega + \Gamma \subset x$; neu $\forall h \in \Omega + \Gamma$, $x_0 \in \Omega + \Gamma$ ta có :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} dt = \overline{\delta} F(x_0, h)$$

thì giới hạn đó được gọi là biến phân trung bình (theo tích phân) thứ 1 của hàm F tại
b) Nếu tại x_0 ta có $\overline{\delta} F(x_0, h) \equiv Ah$. Trong đó A là toán tử tuyến tính giới nội, thì gọi là khả vi trung bình (theo nghĩa tích phân) và

$$\overline{\delta} F(x_0, h) = Ah =: \overline{F}'(x_0, h).$$

$\overline{F}'(x_0, h)$ - vi phân trung bình của F tại x_0, $\overline{F}'$ - đạo hàm trung bình (theo tích phân) c x_0. Sau này để đơn giản ta chỉ gọi là biến phân trung bình, khả vi trung bình, đạo hà bình của F.

1.2 - Tính chất của đạo hàm trung bình

a - Hiển nhiên ta có hệ thức

$$(\overline{F + G})'(x_0) = \overline{F}'(x_0) + \overline{G}'(x_0)$$

$$(\overline{\alpha F})'(x_0) = \alpha \overline{F}'(x_0)$$

$$(\overline{F * G})'(x_0) = \overline{F}'(Z_0) \cdot \overline{G}'(x_0) \qquad (Z_0 = G(x_0))$$

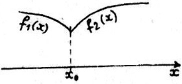
b - N F có đạo hàm Getoeux, thì F có đạo hàm trung bình.
c - Tồn tại hàm F có đạo hàm trung bình tại x_0, mà không có đạo hàm Getoeux tại
Ví dụ $F(x) = |x|$ không có đạo hàm geto tại $x = 0$

g $\overline{F}'(0) = 0$

àm F có điểm góc tại x_0 (hình 1), nhưng vẫn có đạo hàm trung bình:

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \le x_0 \\ f_2(x) & x \ge x_0 \end{cases}$$

$$\overline{F}'(x_0) = \frac{1}{2}[f_1'(x_0) + f_2'(x_0)]$$



Hình 1

àm F có thể không liên tục tại x_0, mà vẫn có đạo hàm trung bình tại đó:

. :

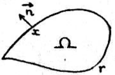
$$F(x) = \begin{cases} \alpha_1 x & +\alpha_2 \\ \beta_1 x & +\beta_2 \end{cases}$$

$$\overline{F}'(x_0) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)$$

BÀI TOÁN KHUYẾCH TÁN VỚI PHƯƠNG TRÌNH LAPLAXƠ

g phần này ta đề cập đến việc giải gần đúng phương trình:

$$\nabla^2 U(x) = 0 \qquad x \in \Omega + \Gamma \tag{2.1}$$



Hình 2

$:$ $\Omega + \Gamma$ đóng, giới nội trong $R^2(R^3)$

Γ - biên trơn từng khúc

kiện biên :

$$\alpha U(x) + \beta q(x) = d(x) \qquad x \in \Gamma \tag{2.2}$$

g đó α, β là các hằng số, $d(x)$ hàm đã cho giới nội,

- là hàm thế vị (xem [1]), với giả thiết khả vi trung bình hai lần. $q = \dfrac{\partial U(x)}{\partial n(x)}$, $\vec{n}(x)$

uyến ngoài tại x.

giờ ta đưa ra phương pháp chung giải bài toán (2.1), (2.2):

phương pháp cân bằng sai số (xem [1]), nghiệm $U(x)$ được tìm thỏa mãn hệ thức

$$\int_\Omega [\nabla^2 U(x)] W(x) d\Omega(x) = 0 \tag{2.3}$$

g đó : $W(x)$ - hàm trọng lượng.

ích phân từng phần hai lần vế trái của (2.3) ta đi đến hệ thức:

$$\int_\Omega [\nabla^2 W(x)] U(x) d\Omega(x) = \int_\Gamma U(x)\frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} d\Gamma(x) - \int_\Gamma W(x)\frac{\partial U(x)}{\partial \vec{n}(x)} d\Gamma(x) \tag{2.4}$$

$W(x)$ là nghiệm của phương trình:

$$\nabla^2 W(x) = \delta(\xi, x) \tag{2.5}$$

ở đây : $\delta(\xi, x)$ - hàm Dirac

Từ (2.4) và (2.5) ta có:

$$\int_{\Omega} \delta(\xi, x) U(x) d\Omega(x) = \int_{\Gamma} U(x) \frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} W(x) \frac{\partial U(x)}{\partial \vec{n}(x)} d\Gamma(x)$$

Theo tính chất hàm Dirac, (2.6) được viết lại là :

$$U(\xi) + \int_{\Gamma} U(x) \frac{\partial W(x)}{\partial \vec{n}(x)} d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} W(x) \frac{\partial U(x)}{\partial \vec{n}(x)} d\Gamma(x)$$

Nghiệm của (2.5) có dạng:

$$U^*(\xi, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r(\xi, x)} & \text{Đối với trường hợp 2 chiều} \\ \dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{1}{r(\xi, x)} & \text{Đối với trường hợp 3 chiều} \end{cases}$$

Trong đó $r(\xi, x)$ là khoảng cách giữa các điểm ξ và x.

Ký hiệu:

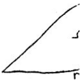
$$q^*(\xi, x) = \frac{\partial U^*(x)}{\partial \vec{n}(x)}$$

Thay (2.8), (2.9) vào (2.7) ta có:

$$U(\xi) + \int_{\Gamma} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

Chú ý rằng trong (2.10) $\xi \in \Omega + \Gamma$, $x \in \Gamma$. Vì vậy (2.10) cho sự ràng buộc giữa các giá trị hàm tại các điểm trong Ω và điểm biên Γ.

Với $\xi \in \Gamma$, tích phân ở vế trái của (2.10) chứa kỳ dị yếu (tại $\xi \equiv x$. Để khắc phục ta xét hình cầu tâm ξ, bán kính ε và giả sử biên của hình cầu là Γ_ε (hình 3). Khi đó ta có:



Hình 3

$$\int_{\Gamma} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\varepsilon} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta được

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = U(\xi) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

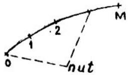
Khi đó (2.10) có dạng

$$C(\xi) U(\xi) + \int_{\Gamma} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

$$C(\xi) = 1 + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma_\epsilon} q^*(\xi, x) d\Gamma(x) \tag{2.15}$$

giờ ta giải (2.14) trong trường hợp 2 chiều. Chia biên thành N phần tử và đánh số chúng N. Giả sử trên mỗi phần tử thứ j $(j = \overline{1, N})$ Các hàm $U(x)$, $q(x)$ có bậc tương ứng là ặt

$$M = \max_{j=\overline{1,N}} \left[\max(M_j, N_j) \right] \tag{2.16}$$



Hình 4

ló trên mỗi phần tử thứ j, ta chọn $M+1$ nút và được heo thứ tự từ 0 đến M (nút thứ 0 và nút thứ M tương ı và cuối của phần tử) (hình 4).
iệu : $C^{i\ell}$, $U^{i\ell}$, $q^{i\ell}$ là các giá trị của $C(\xi)$, $U(\xi)$, $q(\xi)$ g khi ξ ở nút thứ ℓ của phần tử i.
ng trình (2.14) được viết cho tất cả các nút (từ nút thứ thứ M) của tất cả các phần tử, ta đưa đến hệ:

$$\ell + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} U(x) Q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma(x); \quad (i = \overline{1, N}; \ell = \overline{1, M}) \tag{2.17}$$

ử rằng, trên mỗi phần tử thứ j $(j = \overline{1, N})$ các hàm U và q được biểu diễn dưới dạng :

$$U = \sum_{k=1}^{M} \varphi_k^j U^{jk}, \qquad q = \sum_{k=0}^{M} \psi_k^j q^{jk} \tag{2.18}$$

$\varphi_0^j, \varphi_1^j, \ldots, \varphi_M^j$; $\quad \psi_0^j, \psi_1^j, \ldots, \psi_M^j$ là các hàm nội suy của $U(x)$, $q(x)$ trên phần tử ng ứng.
ló:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma_j} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) &= \sum_{k=0}^{M} \Big(\int\limits_{\Gamma_j} q^*(\xi, x) \cdot \varphi_k^j d\Gamma(x) \Big) U^{jk} \\ \int\limits_{\Gamma_j} q(x) U^*(\xi, x) d\Gamma(x) &= \sum_{k=0}^{M} \Big(\int\limits_{\Gamma_j} \psi_k^j U^*(\xi, x) d\Gamma(x) q^{jk} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$h_{jk}^{i\ell} = \int\limits_{\Gamma_j} \varphi_k^j q^*(\xi, x) d\Gamma(x), \quad g_{jk}^{i\ell} = \int\limits_{\Gamma_j} \psi_k^j U^*(\xi, x) d\Gamma(x) \tag{2.20}$$

2.17) ta được :

$$C^{i\ell} U^{i\ell} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{M} h_{jk}^{i\ell} U^{jk} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{M} g_{jk}^{i\ell} q^{jk} \quad (i = \overline{1, N};\ j = \overline{1, M}) \tag{2.21}$$

ất cả các nút chung của hai phần tử kề nhau ta có:

$$\begin{cases} U^{10} &= U^{nm} \\ U^{jM} &= U^{(j+1),M} \ (j = \overline{1,N}) \end{cases}, \qquad \begin{cases} q^{10} &= q^{NM} \\ q^{jM} &= q^{(j+1),M} \ (j = \overline{1,N-1}) \end{cases}$$

Đặt

$$\tilde{h}^{i\ell}_{jk} = \begin{cases} h^{i\ell}_{jk} & k = \overline{1,M-1} \\ h^{i\ell}_{10} + h^{i\ell}_{NM} & j = N, k = M \\ h^{i\ell}_{jM} + h^{i\ell}_{(j+1)0} & k = M, j = \overline{1,N-1} \end{cases}$$

$$\hat{g}^{i\ell}_{jk} = \begin{cases} g^{i\ell}_{jk} & k = \overline{1,M-1} \\ g^{i\ell}_{10} + g^{i\ell}_{NM} & j = N, k = M \\ g^{i\ell}_{jM} + g^{i\ell}_{(j+1)0} & k = M, j = \overline{1,N-1} \end{cases}$$

Khi đó (2.21) trở thành:

$$C^{i\ell}U^{i\ell} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} \tilde{h}^{i\ell}_{jk}U^{jk} = \sum_{j=1}^{N}\sum k = 1^{M} \ \hat{g}^{i\ell}_{jk}q^{ik} \quad (i = \overline{1,N};\ j = \overline{1,M})$$

Đặt

$$\hat{h}^{i\ell}_{jk} = \begin{cases} \tilde{h}^{i\ell}_{i\ell} + C^{i\ell} & j = i,\ k = \ell \\ \tilde{h}^{i\ell}_{jk} & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Thì (2.25) có dạng:

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} \hat{h}^{i\ell}_{jk}U^{jk} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} \hat{g}^{i\ell}_{jk}q^{i\ell} \qquad (i = \overline{1,N};\ \ell = \overline{1,M})$$

Kết hợp với điều kiện biên (2.2) được viết cho tất cả các nút (từ nút thứ 1 đến nút t **của các phần tử, ta được:**

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} \hat{h}^{i\ell}_{jk}U^{jk} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M} \hat{g}^{i\ell}_{jk}q^{jk} \\ &\alpha U^{i\ell} + \beta q^{i\ell} = d^{i\ell} \\ &i = \overline{1,N}; \qquad \ell = \overline{1,M} \end{aligned}$$

(2.28) là hệ gồm 2 M.N phương trình với 2 M.N ẩn số (M.N ẩn số $U^{i\ell}$, M.N ẩn $q^{i\ell}$. (**này ta tìm được các giá trì của U và q trên biên Γ, để xác định giá trị của U tại điểm tro** **Ω, ta dựa vào đẳng thức (2.10).**

Ký hiệu :

$$H = \left[\hat{h}^{i\ell}_{jk}\right]^{\ell,k=\overline{1,M}}_{i,j=\overline{1,N}}, \qquad G = \left[\hat{g}^{i\ell}_{jk}\right]^{\ell,k=\overline{1,M}}_{i,j=\overline{1,N}}$$

$$\begin{aligned} U &= (U^{11}, \ldots, U^{1M}, U^{21}, \ldots, U^{2M}, \ldots, U^{N1}, \ldots, U^{NM})^T \\ Q &= (q^{11}, q \ldots, q^{1M}, q^{21}, \ldots, q^{2M}, \ldots, q^{N1}, \ldots, q^{NM})^T \\ D &= (d^{11}, d^{12}, \ldots, d^{1M}, d^{21}, \ldots, d^{2M}, \ldots, d^{N1}, \ldots, d^{NM})^T \end{aligned}$$

Khi đó (2.10) được viết dưới dạng ma trận.

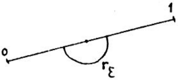
$$Q = \frac{1}{\beta}D - \frac{\alpha}{\beta}U$$
$$(H + \frac{\alpha}{\beta}G) = \frac{1}{\beta}GD \tag{2.30}$$

- Trường hợp U và q không đổi trên mỗi phần tử biên

ng phần này, giả thiết mỗi phần tử biên là tuyến tính và các hàm U, q không đổi trên (hi đó, trên mỗi phần tử ta lấy một nút chính là trung điểm của nó. Số được đánh cho trùng với phần tử chứa nó.

ng trường hợp này ta có:

$$\psi_1^j = \varphi_1^j = 1 \qquad \forall j = \overline{1, N}$$
$$h_{j1}^{i1} = \int\limits_{\Gamma_j} q^*(\xi, x) d\Gamma(x) =: H_{ij}$$
$$g_{j1}^{i1} = \int\limits_{\Gamma_j} U^*(\xi, x) d\Gamma(x) =: G_{ij}$$



Hình 5

$$C_i := c^{i1} = 1 + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} U^*(\xi, x) d\Gamma(x) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} d\Gamma(x) = \frac{1}{2}$$
$$U^i := U^{i1}, \qquad q^i = q^{i1}, \quad D^i = d^{i1}$$

rở thành

$$\frac{1}{2}U^i + \sum_{j=1}^{N} H_{ij}U^j = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}q^j \quad (i = \overline{1, N}) \tag{2.31}$$

t

$$\hat{H}_{ij} = \begin{cases} H_{ii} + \frac{1}{2} & i = j \\ H_{ij} & i \neq j \end{cases} \tag{2.32}$$

: hợp với điều kiện biên (2.2) được viết cho tất cả các nút ta có:

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{H}_{ij}U^j = \sum_{j=1}^{N} \hat{G}_{ij}q^j$$
$$\alpha U^i + \beta q^i = D^i \quad (i = \overline{1, N}) \tag{2.33}$$

hiệu:

$$H = \left[\hat{H}_{ij}\right] - ij = 1^N, \qquad G = \left[\hat{G}_{ij}\right]_{ij=1}^{N},$$
$$U = (U^1, U^2, \ldots, U^N)^T, \quad Q = (q^1, q^2, \ldots, q^N)^T, \quad D = (D^1, D^2, \ldots, D^N)^T. \tag{2.34}$$

33) được viết dưới dạng ma trận:

$$Q = \frac{1}{\beta}D - \frac{\alpha}{\beta}U$$

$$(H + \frac{\alpha}{\beta}G)U - \frac{1}{\beta}GD \qquad ($$

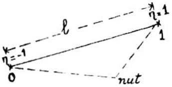
Giải (2.35) ta tìm được các giá trị của U và q trên biên. Để tìm giá trị của U tại điểm t của Ω ta lại dựa vào (2.10).

2.2 - Trường hợp u và q có dạng tuyến tính trên mỗi phần tử biên

Trong phần này, vẫn giả thiết mỗi phần tử biên là tuyến tính, còn các hàm U , q có tuyến tính.

Khi đó trên mỗi phần tử ta chọn 2 nút là hai đầu của phần tử (hình 6).

Điểm	η	φ_0^j	φ_1^j
0	-1	1	0
1	1	0	1



Hình 6

Giả sử mỗi phần tử có độ dài bằng ℓ.
Đặt

$$\eta = \frac{2x}{\ell} \qquad (2$$

Trong trường hợp này ta có:

$$\begin{cases} \varphi_0^j &= \psi_0^j = \frac{1}{2}(1-\eta) \\ \varphi_0^1 &= \psi_1^j = \frac{1}{2}(1+\eta) \end{cases} \qquad \forall j = \overline{1, N} \qquad (2$$

$$h_{ij}^0 = \int_{\Gamma_j} \varphi_0^j q^*(\xi, x) d\Gamma(x) \qquad h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \varphi_1^j q^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

$$g_{ij}^0 = \int_{\Gamma_j} \psi_0^j U^*(\xi, x) d\Gamma(x) \qquad g_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \psi_1^j U^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

$$\begin{cases} \tilde{h}_{ij} &= h_{ij}^1 + h_{i,j+1}^0 \quad j = \overline{1, N-1} \\ \tilde{h}_{ij} &= h_{iN}^1 + h_{i1}^0 \quad j = N \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{g}_{ij} &= g_{ij}^1 + g_{i,j+1}^0 \quad j = \overline{1, N-1} \\ \hat{g}_{ij} &= g_{iN}^1 + g_{i1}^0 \quad j = N \end{cases}$$

$$\hat{h} = \begin{cases} \tilde{h}_{ii} + C_i & j = i \\ \tilde{h}_{ij} & j \neq i \end{cases} \qquad (2$$

$$U^i := U^{i1}; \quad C^i := C^{i1}; \quad q^i := q^{i1}; \quad d^i := d^{i1} \qquad (2$$

Khi đó hệ (2.28) có dạng:

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{h}_{ij} U^j = \sum_{j=1}^{N} \hat{g}_{ij} q^j$$
$$\alpha U^i + \beta q^i = d^i \quad (i = \overline{1, N} \qquad (2$$

Đặt:

$$U = \left(U^i\right)_{i=1}^N, \quad Q = \left(q^i\right)_{i=1}^N, \quad D = \left(d^i\right)_{i=1}^N \tag{2.41}$$

(2.40) được viết dưới dạng ma trận:

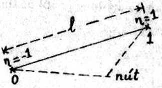
$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\beta}D - \frac{\alpha}{\beta}U \\ (H + \frac{\alpha}{\beta}G)U &= \frac{1}{\beta}GD \end{aligned} \tag{2.42}$$

Giải hệ (2.42) tìm được u và q trên biên. Để tìm giá trị của u tại điểm trong của Ω, ta áp ng (2.10).

2.3 - Trường hợp U có dạng tuyến tính, q không đổi trên mỗi phần tử

Trong trường hợp này, trên mỗi phần tử ta lấy 2 nút là hai đầu của nó. Ta có:

Điểm	η	φ_0^j	φ_1^j	ψ_0^j	ψ_1^j
0	-1	1	0	1/2	1/2
1	1	0	1	1/2	1/2



Hình 7

$$\begin{aligned} \varphi_0^j &= \frac{1}{2}(1-\eta), \quad \varphi_1^j = \frac{1}{2}(1+\eta) \\ \psi_0^j &= \psi_1^j = \frac{1}{2} \qquad (\eta = \frac{2x}{\ell}) \end{aligned} \tag{2.43}$$

lấy ℓ độ dài của phần tử

$$h_{ij}^0 = \int_{\Gamma_j} \varphi_0^j q^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

$$h_{ij}^1 = \int_{\Gamma_j} \varphi_1^j q^*(\xi, x) d\Gamma(x)$$

$$g_{ij}^0 = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_j} U^*(\xi, x) d\Gamma(x) = g_{ij}^1$$

$$\bar{h}_{ij} = \begin{cases} h_{ij}^1 + h_{i,j+1}^0 & j = \overline{1, N-1} \\ h_{iN}^1 + h_{i1}^0 & j = N \end{cases} \qquad \bar{g}_{ij} = \begin{cases} g_{ij}^1 + g_{i,j+1}^0 & j = \overline{1, N_1} \\ g_{iN}^1 + g_{i1}^0 & j = N \end{cases}$$

$$\hat{h}_{ij} = \begin{cases} \bar{h}_{ij} & i \neq j \\ \bar{h}_{ii} + C_i & i = j \end{cases} \tag{2.44}$$

$$C^i := C^{i1}; \quad U^i := U^{i1}; \quad q^i := q^{i1}; \quad d^i := d^{i1}$$

Khi đó (2.28) có dạng:

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{h}_{ij} U^j = \sum_{j=1}^{N} \hat{g}_{ij} q^j$$
$$\alpha U^i + \beta q^i = d^i \qquad (i = \overline{1,N}$$ (2

Đặt:

$$H = [\hat{h}_{ij}]_{i,j=1}^{N}, \quad G = [\hat{g}_{ij}]_{i,j=1}^{N}, \quad U = (u^i)_{i=1}^{N}, \quad Q = (q^i)_{i=1}^{N}, \quad D = (d^i)_{i=1}^{N}$$

(2.45) được viết dưới dạng ma trận:

$$Q = \frac{1}{\beta} D - \frac{\alpha}{\beta} G$$
$$(H + \frac{\alpha}{\beta} G) U = \frac{1}{\beta} GD$$ (2

Giải (2.46) ta tìm được giá trị của U và q trên biên Γ.
Sau đó áp dụng (2.10) để tìm giá trị của U tại điểm trong Ω.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. Москва "Мир" 1
2. Brebbia C. A. The boundary element method for Engineers. Pentech Press. New York 1
3. C use T. A. Boundary integral equation methods in solid mechanics. Report SM 73-17 I of mechanical Engineering. Carnegie - Mellon University. Pittsburegh 1973.

Phan Van Hap - Le Dinh Dinh

THE AVERAGE DIFFERENTIATION AND ITS APPLICATIONS

In this paper is given the definition of the (integral) average derivate.

With this conception we consider the problem of the approximate solution of the equations (2.1 (2.2). The approximate solution of this problem follows from the solution of linear algebraic (2.30) relation

$$U(\xi) + \int_{\Gamma} U(x) q^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} q(x) U^*(\xi, x) dx, \quad (\xi \in \Omega)$$

Bộ môn Phương pháp tính - ĐHTH Hà Nội