TAP CHÍ KHOA HỌC ĐHQG HN. KHTN, tXI, n°3 - 1995

VỀ NGHỊCH ĐẢO PHẢI CỦA TOÁN TỬ SAI PHÂN VỚI TRỌNG ĐẠI SỐ.

Nguyễn Vũ Lương

Khoa Toán, Đại học khoa học tự nhiên, ĐHQGHN

Xét không gian tuyến tính X trên đường $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathcal{C}$ hoặc $\mathcal{F} = \mathcal{R}$) với dim X = s ($1 < s < \infty$). Trong X chọn một cơ sở cố định. Khi đó mỗi phần tử $x_j \in X$ đều được viết dưới dạng

$$x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{js})$$

Xét toán tử đại số $A \in L_0(X)$ với các nghiệm đơn $t_1, t_2, \dots, t_r \in \mathcal{F}$:

$$P_A(t) = \prod_{j=1}^{r} (t - t_j)$$

Đặt $P_k = \omega_k(A)$ với $\omega_k(t) = \prod_{j \neq k} \dfrac{(t - t_j)}{t_k - t_j}$

Khi đó $I = P_1 + P_2 + \dots + P_k$; $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$,

$$A = \sum_{j=1}^{r} t_j P_j$$

Và $A^k = \sum_{j=1}^{r} t_j^k P_j$ $(k \in N)$; $Ap_j = t_j P_j$.

$$X = \bigoplus_{j=1}^{r} X_j \ ; X_j = P_j X$$

Kí hiệu $X_j^+ := (I - P_j)X$; j = 1,2,...., r.

Xét không gian X_∞ gồm tất cả các dãy véc tơ $x = (x_0, x_1, x_2 \dots)$. $I_n \in X$, n = 0,1,2,... Tập hợp tất cả các toán tử khả nghịch phải trong X_∞ được kí hiệu bởi $R(X_\infty)$. Ứng với mỗi $D \in R(X_\infty)$, kí hiệu $\mathcal{R}_D$ tập tất cả các nghịch đảo phải của D trong $L(X_\infty)$, nếu tồn tại $R \in L_0(X_\infty)$. Tập tất cả các toán tử ban đầu của $D \in R(X_\infty)$ được kí hiệu bởi $\mathcal{F}_D$. Nếu $F \in \mathcal{F}_D$ và $FR = 0$ với $R \in \mathcal{R}_D$ thì ta nói F là toán tử ban đầu của D tương ứng với R. Kí hiệu $V(X_\infty)$ là tập tất cả các toán tử Volterra tác động trong X, tức là $V \in V(X_\infty)$ khi và chỉ khi $V \in L_0(X_\infty)$ và phương trình $(I + \lambda V)x = y$, $y \in x$ có nghiệm duy nhất với mọi $y \in x$, $\lambda \in \mathcal{F}$.

Xét toán tử sai phân trong X_∞ với trọng đại số A :

$$D_A x = (x_{n+1} - Ax_n) \tag{1}$$

Dễ dàng kiểm tra trực tiếp hệ thức sau :

$$\ker D_A = \{x \in X; x_n = \sum_{j=1}^{r} t_j^n p_j u, u \in X\} \tag{2}$$

Thật vậy, $x \in \ker D_A \leftrightarrow x_{n+1} - Ax_n = 0 \quad \forall n \in N$

Chọn $x_0 = u \in X$ tùy ý. Khi đó x_n được xác định theo công thức truy hồi

$$x_n = A^n x_0 = \sum_{j=1}^{r} t_j^n p_j x_0 = \sum_{j=0}^{r} t_j^n p_j u$$

Bổ đề 1. $D_A \in R_0(X_\mathcal{X})$.

Chứng minh.

Xét toán tử $R_A \in L_0(X_\mathcal{X})$ xác định như sau:

$$R_A x = y \ ; \ y_0 = 0 \ ; \ y_1 = x_0, \quad y_n = \sum_{j=1}^{r} p_j\left(x_{n-1} + t_j x_{n-2} + \dots + t_j^{n-2} x_0\right)$$

$$(n = 2, 3, \dots) \qquad (3)$$

Khi đó

$$D_A R_A x = (y_{n+1} - Ay_n) \ ; \ y_1 - Ay_0 = x_0 \ ;$$

$$y_{n+1} - Ay_n = \sum_{j=1}^{r} p_j\left(x_n + t_j x_{n-1} + \dots + t_j^n x_0\right) -$$

$$- A \sum_{j=1}^{r} p_j\left(x_{n-1} + t_j x_{n-2} + \dots + t_j^{n-1} x_0\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j\left(x_n + t_j x_{n-1} + \dots - t_j^n x_j\right) - \sum_{j=1}^{r} p_j\left(t_j x_{n-1} + t_j^2 x_{n-2} + \dots + t_j^n x_0\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} p_j x_n = x_n \ ; \ n = 1, 2, \dots$$

Vậy $D_A R_A = I$ và $D_A \in R_0(X_\mathcal{X})$

Nhận xét rằng D_A không khả nghịch vì $\dim \ker D_A \neq 0$

Bổ đề 2. R_A xác định theo (3) là toán tử Volterra.

Chứng minh. Xét phương trình

$$(I - \lambda R_A)x = y \ ; \ y \in X_\mathcal{X} \qquad (4)$$

Phương trình (4) luôn luôn có nghiệm duy nhất xác định theo hệ thức truy hồi.

$$\begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_n = \lambda\left(x_{n-1} + A x_{n-2} + \dots + A^{n-1} x_0\right) + y_n \qquad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Vậy $R_A \in V(X)$

Bổ đề 3. Mọi nghịch đảo phải thuộc $L_0(X_\mathcal{X})$ đều có dạng.

$$R = R_A + F_A B, \qquad B \in L_0(X_\mathcal{X}).$$

Chứng minh. Vì $D_A F_A = 0$ nên $D_A R = I$.

Với $R, R_A \in \mathcal{R}_{D_A}$, $R, R_A \in L_0(X)$ thì chỉ cần chọn $B = R - R_A$, ta được

$$R_A + F_A B = R_A + F_A(R - R_A) = R_A + (I - R_A D_A)(R - R_A) =$$
$$= R_A + R - R_A - R_A D_A (R - R_A) = R.$$

Với mỗi $u \in X$, xét không gian

$$X^u = \{x \in X : x_0 = u\} \qquad (5)$$

Định lý 1. Giả sử $B \in L_0(X_\mathcal{X})$ sao cho

$\operatorname{Im} B \subset X^u$ với $u \in X$ cho trước.

Khi đó

$R = R_A + F_A B \in V(X_\mathcal{X})$.

Chứng minh. $\forall x \in X_\infty$, ta có :

$$Bx = (u, y_1, y_2, \ldots).$$

Vì $F_A X_\infty = \ker D_A$ nên $F_A Bx = (u, Au, A^2u, \ldots)$. (6)

Xét phương trình

$$(I - \lambda R)x = v \ , \ v \in X_\infty \qquad (7)$$

Sử dụng (6), sẽ được hệ :

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots) - \lambda (0, x_0, x_1, Ax_0, \ldots) - \lambda (u, Au, A^2u, \ldots) = (v_0, v_1, v_2, \ldots)$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_0 - u = v_0 \\ x_1 - (x_0 + Au) = v_1 \\ x_2 - (x_1 + A x_0 + A^2 u = v_2 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x_0 = v_0 + u \\ x_n = v_n + (x_n + A x_{n-2} + \ldots + A^{n-1} x_0 + A^n u) \end{cases}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Vậy (7) có nghiệm duy nhất $\forall \lambda \in \mathcal{F}$, $v \in X_\infty$.

Suy ra $R := R_A - F_A B \in v(X_\infty)$.

Định lý 2. Giả sử $\mathcal{F} \in C$. Với $B \in L_0(X_\infty)$ sao cho $\exists\ x_1, x_2 \in X_\infty$ để $B(x_2 - x_1) \notin x^0_\infty$ thì toán tử

$$R = R_A + F_A B$$

không là toán tử Volterra.

Chứng minh.

Theo giả thiết, $\forall x \in X_\infty$, ta có : $Bx = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$

và tồn tại $u \in X$, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{F}$ $(\beta_m \neq 0)$

sao cho

$$y_0 = u + \sum_{j=0}^{m} \beta_j x_j + f(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$$

với $f(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$ hàm đa tuyến tính.

Khi đó

$$F_A Bx = (y_0\ ,\ Ay_0\ ,\ A^2 y_0, \ldots)$$

Xét phương trình

$$(I - \lambda R)x = v\ ,\ v \in X_\infty . \qquad (8)$$

Khi đó, không mất tính tổng quát, có thể coi m là số tự nhiên nhỏ nhất để $\beta_m \neq 0$. Vậy $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{m-1} = 0$. So sánh tọa độ ở hai vế (8), ta được :

$$\begin{cases} x_0 = v_0 + \lambda y_0 \\ x_n = v_n + \lambda (x_{n-1} + A_{n-2} + \ldots + A^{n-1} x_0 + A^n y_0) \end{cases}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

với $y_0 = u + \beta_m x_m + f(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$.

So sánh m tọa độ đầu tiên và coi $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ như các tham số tự do, ta được hệ tuyến tính

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{r} P_j(x_0 - \lambda\beta_m x_m) = v_0 + \lambda f \\ \sum_{j=1}^{r} P_j(x_1 - \lambda x_0 - \lambda\beta_m t_j x_m) = v_1 + \lambda Af \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{r} P_j(-\lambda t_j^{m-1} x_0 - \lambda t_j^{m-2} x_1 - \ldots - \lambda x_{m-1} + (1-\beta_m t_j^m) x_m = v_m + \lambda A^m f \end{cases} \tag{9}$$

Áp toán tử P_k (k - 1,2,..., r) vào hai vế của hệ (9), ta được hệ tương đương:

$$\begin{cases} P_k(x_0 - \lambda\beta_m x_m) = P_k(v_0 + \lambda f) \\ P_k(x_1 - \lambda x_0 - \lambda\beta_m t x_m) = P_k(v_1 + \lambda Af) \\ \ldots \\ P_k(-\lambda t_k^{m-1} x_0 - \lambda t_k^{m-2} x_1 - \ldots - \lambda x_{m-1} + (1-\beta_m t_k^m) x_m = P_k(v_m + \lambda A^m f) \end{cases}$$

$k = 1,2,\ldots, r.$

Đặt $P_k x_j = u_j^k$, $u_j^k \in X_k$, ta được hệ :

$$\begin{cases} u_0^k - \lambda\beta_m u_m^k = P_k(v_0 + \lambda f) \\ u_1^k - \lambda u_0^k - \lambda\beta_m t_k u_m^k = P_k(v_1 + \lambda Af) \\ \ldots \\ \lambda t_k^{m-1} u_0^k - \lambda t_k^{m-2} u_1^k - \lambda u_{m-1}^k + (1-\beta_m t_k^m) u_m = P_k(v_m + \lambda A^m f) \end{cases} \tag{10}$$

Với mỗi $k \in \{1,2,\ldots, r\}$, xét ma trận M_K của vế trái của hệ (1):

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda\beta_m \\ -\lambda & 1 & 0 & \cdots & -\lambda\beta_m t_k \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda t_k^{m-1} & -\lambda t_k^{m-2} & -\lambda t_k^{m-3} & \cdots & 1-\beta_m t_k^m \end{pmatrix} \tag{11}$$

Đặt $P_k(\lambda) = \det M_k$. (12)

Khi đó $\deg P_k(\lambda) = m+1$ vì hệ số cao nhất của $P_k(\lambda)$ bằng $(-1)^m \beta_m \neq 0$.

Do vậy, trong C, phương trình $P_k(\lambda) = 0$ có ít nhất một nghiệm λ_k. Khi đó, hệ (10) ứng với $\lambda = \lambda_k$ không thể có nghiệm duy nhất. Điều đó chứng tỏ phương trình (8) hoặc vô nghiệm hoặc có nhiều hơn một nghiệm. Vậy $R \in v(X)$.

Từ kết quả của định lý 1 và 2, ta có thể phát biểu tiêu chuẩn Volterra của nghịch đảo phải của toán tử sai phân D_A với trọng đại số A như sau.

Định lý 3.

a) Với $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ thì điều kiện cần và đủ để một nghịch đảo phải của D_A dạng

$$R = R_A + F_A B, \qquad B \in L_0(X_{\mathcal{F}}) \tag{13}$$

là toán tử Volterra là $\exists\, u \in X$ sao cho $\mathrm{Im}\, A \subset X^u$ (X^u xác định theo (8)).

b) Với $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ thì để R dạng (13) là toán tử Volterra, điều kiện cần và đủ là : hoặc $\exists\, u \in X$ để $\mathrm{Im}\, A \subset X^u$ hoặc các đa thức $P_k(z)$ dạng (12) không có nghiệm thực.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Przeworska - Rolewicz D., Algebraic Analysis, Warsaw - Dordrecht, 1988.
2. Nguyen Van Mau, Generalized algebraic elements and singular integral equations with transformed argument, Warsaw 1989.
3. Nguyen Vu Luong, On a class of generalized difference operators, J. of Sci. T2-1993, 21 - 25.

VNU. Journal of science. Nat. sci. t.XI, n°3 - 1995

ON RIGHT INVERSES OF DIFFERENCE OPERATORS WITH ALGEBRAIC WEIGHTS

Nguyen Vu Luong
Faculty of mathematics, VNU, Hanoi

The paper deal with some characterizations of right inverses of operators of the form

$$D_A\{x_n\} = \{x_{n+1} - Ax_n\}$$

Where x_n X, X - linear space over a field of scalars, A - algebraic operator with simple roots.

In this paper all Volterra right inverses of difference operators with algebraic weight were thorougly and clearly described.