VỀ LỚP CÁC DÀN KHÔNG CÓ DÀN CON CO ĐƯỢC

Nguyễn Đức Đạt
Khoa Toán, Đại học khoa học tự nhiên, ĐHQGHN

1. MỞ ĐẦU

Nghiên cứu bài toán Gratzer [1] : "Tìm điều kiện trên dàn L sao cho Sub(L) xác định L tới mức đẳng cấu", Hoàng Minh Chương [2] đã đưa ra điều kiện để Sub(L) xác định L tới mức đẳng cấu hoặc đối đẳng cấu. Trong [3] chúng tôi đã đưa ra khái niệm dàn con co được và chứng minh định lý : "Nếu dàn L không có dàn con co được thì Sub(L) xác định L tới mức đẳng cấu hoặc đối đẳng cấu".

Mục đích bài này là nghiên cứu lớp K tất cả các dàn thỏa mãn điều kiện của định lý đã nêu tức lớp các dàn không có dàn con co được.

Chúng tôi đã chứng minh được lớp K chứa tất cả các dàn modular và nửa modular không phân tích tuyến tính được và hơn nữa cả các dàn tự do, các dàn có bù duy nhất... Đó là những kết quả có ý nghĩa trong việc giải quyết bài toán Gratzer.

2. CÁC KẾT QUẢ

Trước hết ta nhắc lại khái niệm dàn con co được và chứng minh một số tính chất của nó.

Định nghĩa 2.1. Dàn con thực sự A của dàn L với $|A| > 1$ được gọi là dàn con co được nếu :

(a) A là dàn con lồi.

(b) Nếu $< a, b; c, d>$ là một hình thoi trong L thì $c \in A \Leftrightarrow d \in A$.

Bổ đề 2.2. Cho A là một dàn con co được trong L và $a \in A$, $k \in L \setminus A$, khi đó :

(P1) Nếu $k < a$ thì $k < x\ \forall x \in A$,

(P2) Nếu $k > a$ thì $k > x\ \forall x \in A$,

(P3) Nếu $k \mid\mid a$ thì $k \mid\mid x\ \forall x \in A$.

Chứng minh :

1) Cho $k < a$, xét $x \in A$ bất kỳ:

a) Nếu $x < k$ thì theo (a) (định nghĩa 2.1) ta có $k \in A$, vô lý.

b) Nếu $x \mid\mid k$ thì $x < x \vee k \leq x \vee a$, theo (a), (b) ta lần lượt có $x \vee k \in A$, $x \wedge k \in A$. Từ $x \wedge k < k < a$ ta suy ra $k \in A$, vô lý.

c) Vậy chỉ có thể là $k<x$ và do đó (P1) được chứng minh.

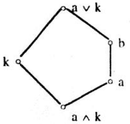
2) Bằng đối ngẫu ta có (P2).

3) Áp dụng (P1), (P2), ta có (P3).

Bây giờ ta áp dụng các tính chất trên để chứng minh các kết quả của bài toán.

Mệnh đề 2.3. Nếu M là dàn modular không phân tích tuyến tính được thì M không có dàn con co được.

Chứng minh : Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử M có dàn con co được A. Vì $|A| > 1$ nên có thể giả thiết $\exists\ a, b \in A$ sao cho $a < b$. Xét phần tử $k \in M \setminus A$. Vì M không có phân tích tuyến tính nên theo bổ đề 2.2 có thể chọn k sao cho $k \mid\mid a, b$. Nếu $a \vee k \in A$, theo định nghĩa 2.1 ta dễ dàng suy ra $k \in A$, vô lý. Vậy ta giả thiết $a \vee k \notin A$. Vì $a \vee k > a$, theo (P2) ta có $a \vee k > b$ và do đó $a \vee k = b \vee k$ (H1). Tương tự ta cũng có $a \wedge k = b \wedge k$. Vậy trong M có dàn con ngũ giác $N_5 = \{a, b, k, a \wedge k, b \vee k\}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết M là dàn modular. Mệnh đề được chứng minh.



H.1

Mệnh đề 2.3. Cho thấy lớp K các dàn không có dàn con co được là khá lớn, nó chứa các dàn thỏa mãn điều kiện của định lý Hoàn Minh Chương [2] : "Nếu M là dàn modular chiều cao hữu hạn địa phương và không phân tích tuyến tính được thì Sub(M) xác định M tới mức đẳng cấu hoặc đối đẳng cấu".

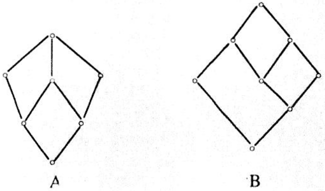
Hơn nữa dưới đây ta còn chứng tỏ K chứa cả những dàn nửa modular không phân tích tuyến tính được. Ta nhắc lại khái niệm này [4]

Cho x, y ∈ L, dàn bất kỳ, ta nói phần tử y phủ phần tử x nếu $x < y$ và $[x, y]$ là khoảng đơn. Dàn L độ dài là hữu hạn được gọi là nửa modular nếu nó thỏa mãn điều kiện : a, b phủ $a \wedge b$ thì $a \vee b$ phủ a, b ($a, b \in L$, $a \neq b$).

Mệnh đề 2.4. Nếu M là dàn nửa modular không phân tích tuyến tính được thì M không có dàn con co được.

Chứng minh : Giả sử M có dàn con co được A. Tương tự như đối với mệnh đề 2.3 ta giả thiết $\exists$ a, b ∈ A, k ∈ M \ A sao cho $a < b$ và $k \parallel a, b$. Vậy M có dàn con ngũ giác N_5 (H.1). Vì M có độ dài hữu hạn nên có thể chọn a, k sao cho a, k phủ $a \wedge k$. Vậy $a \vee k$ không phủ a, điều này mâu thuẫn với giả thiết M là nửa modular. Mệnh đề được chứng minh.

Thí dụ:



H.2

Trong (H.2) là hai kiểu dàn không có dàn con co được. Dàn A là nửa modular mà không là modular, còn dàn B là một ví dụ cho thấy lớp K còn chứa cả những dàn không phải là modular và nửa modular. Dưới đây ta sẽ chỉ ra một số kiểu dàn như thế.

Trước hết là các dàn tự do [4]. Dàn tự do $F = FL(X)$ với tập các phần tử sinh $X = \{x_i, i \in I\}$ được xây dựng như sau:

(i) F gồm các "từ" được định nghĩa bằng quy nạp (theo độ dài) như sau:

a) x_i, $i \in I$ là các từ với độ dài $d(x_i) = 0$.

b) Nếu u, v là các từ sao cho $d(u) + d(v) = n - 1$ thì $u \wedge v$, $u \vee v$ là các từ đối với độ dài $d(u \wedge v) = d(u \vee v) = n$.

(ii) Quan hệ thứ tự "$\leq$" trên F được định nghĩa dựa trên những quy tắc sau:

(1) $p \vee q \leq a$ nếu $p \leq a$ và $q \leq a$,

(2) $b \leq p \wedge q$ nếu $b \leq p$ và $b \leq q$,

(3) $p \wedge q \leq a$ nếu $p \leq a$ hoặc $q \leq a$,

(4) $b \leq p \vee q$ nếu $b \leq p$ hoặc $b \leq q$

Ở đây ta quy ước : $x, y \in X$ thì $x \leq y \Leftrightarrow x = y$ và đặt $a = b$ nếu $a \leq b$ và $b \leq a$. Dễ dàng suy ra quan hệ $\leq$ là một thứ tự.

(iii) Đặt Inf $(p,q) = p \wedge q$ và Sup $(p, q) = p \vee q$. Từ các quy tắc (1) $\rightarrow$ (4) ta suy ra F là một dàn.

(iv) Dễ dàng suy ra tính chất phổ dụng của F : cho dàn L bất kỳ và ánh xạ $f : X \rightarrow L$ ta luôn luôn có thể thiết lập một đồng cấu dàn $\varphi : F \rightarrow L$ sao cho $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i \in I$.

Mệnh đề 2.5. Dàn tự do F=FL(X) không có dàn con co được.

Chứng minh : Các trường hợp $|X| \leq 2$ là hiển nhiên. Ta xét F với $|X| \geq 3$. Giả sử F có dàn con co được A.

(I) Xét phần tử $u \in A$. Bằng quy nạp theo d(u) ta chứng minh khẳng định sau :

(*) Nếu x là phần tử sinh chứa trong u thì $x \in A$.

Nếu $d(u) = 0$ tức $u = x$ thì hiển nhiên $x \in A$.

Bây giờ ta giả thiết $d(u) = n > 0$. Khi đó $u = p \wedge q$ hoặc $u = p \vee q$ với $d(p), d(q) < n$. Xét hình thoi $<p, q; p \wedge q, p \vee q>$, theo định nghĩa 2.1 ta có $p, q \in A$. Theo giả thiết quy nạp ta có khẳng định (*).

(II) Theo (*) và vì $|A| > 1$ ta suy ra A chứa ít nhất hai tử x, y với $d(x) = d(y) = 0$.

Xét $z \in X$, $z \neq x, y$. Nếu $x \vee z \notin A$ thì theo (P2) ta có $x \vee z > y$ và do đó $x \geq y$ hoặc $z \geq y$ (quy tắc (4)). Nhưng điều này không xảy ra đối với $x \neq y$, $z \neq y$. Vây ta luôn luôn có $x \vee z \in A$ và từ hình thoi $<x, z; x \wedge z, x \vee z>$ suy ra $z \in A$. Vì z là bất kỳ ta có $X \subseteq A$ và do đó $A = F$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết A là một dàn con co được.

Mệnh đề được chứng minh.

Chú ý : Ta chứng minh được các dàn tự do FL(X) với $|X| \geq 3$ không là modular. Thật vậy cho $x, y, z \in X$, bằng các quy tắc (1) $\rightarrow$ (4) trong (ii) ta dễ dàng chứng tỏ được rằng không thể xảy ra bất đẳng thức $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \geq [(x \wedge z) \vee y] \wedge z$ do đó FL(X) không thỏa mãn $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = [(x \wedge z) \vee y] \wedge z$ là đồng nhất thức trên dàn modular.

Bây giờ ta xét các dàn có bù duy nhất [4]. Dàn L có 0, có 1 thỏa mãn điều kiện : $\forall a \in L$ $\exists! a' \in L$ sao cho $a \wedge a' = 0$, $a \vee a' = 1$ được gọi là dàn có bù duy nhất.

Áp dụng các phương pháp trong lý thuyết về dàn tự do, trong [5] R.P.Dilworth đã chứng minh được rằng một dàn bất kỳ là dàn con của một dàn có bù duy nhất. Như vậy dàn có bù duy nhất không hẳn là phân phối, modular, nửa modular v.v...

Mệnh đề 2.6 : Nếu L là dàn có bù duy nhất thì L không có dàn con co được.

Chứng minh : Giả sử L có dàn con co được A.

1) Ta chứng minh $0, 1 \notin A$. Giả sử $0 \in A$ hoặc $1 \in A$. Xét $k \in L$, $k \neq 0,1$ và hình thoi $<k, k'; 0, 1>$. Theo định nghĩa 2.1 ta có $k \in A$. Vậy $A = L$, điều này mâu thuẫn với A là dàn con co được.

2) Vì $|A| > 1$ ta giả thiết $\exists\, a, b \in A$ sao cho $a < b$. Xét phần tử bù a' của a. Theo 1) ta có $a' \notin A$ và theo (P3) $a' \,||\, b$. Hiển nhiên $a' \vee b = 1$. Xét $a' \wedge b$: theo (P1) $a' \wedge b < a$, suy ra $a' \wedge b \leq a' \wedge a = 0$. Vậy b cũng là phần tử bù của a', điều này mâu thuẫn với giả thiết .

Mệnh đề được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G.Gratzer, General Lattice Theory, Akademic -Verlag-Berlin, 1978.
2. Hoang Minh Chuong, On a Gratzer's problem, Acta Math. Vietnamica, N1, Vol.10 (1985), 134 - 143.
3. Nguyen Duc Dat, Bijections preserving squares and concept of contractible sublattice, Hanoi Univ. J.Sci,N4, 1993, 8 - 12.
4. G. Birkhoff, Lattice Theory, New York, 1948.
5. R.P Dilworth. Lattices with unique complements, Math. Soc. 57 (1945), 123-154.

VNU. Journal of science. Nat. sci, t.XI, n°3 - 1995

ON THE CLASS OF LATTICES HAVING NO CONTRACTIBLE SUBLATTICES

Nguyen Duc Dat
College of Natural Sciences, VNU

Studying a Gratzer's problem [1] on the lattice Sub(L), in [4] we have given a condition on a lattice L under which Sub(L) determines L up to an isomorphism or a dual isomorphism, that is, the lattice L has no contractible sublattices [3].

In this paper, we study the class K of all lattices satisfying the above mentioned condition. We have shown some different types of lattices, wich belong to K such as the modular and semimodular lattices having no linear decompositions, the free lattices and the lattces with unique complements.