TẠP CHÍ KHOA HỌC ĐHQGHN, KHTN, t.XI, n°4 - 1995

MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ RIEMANN VỀ THÁC TRIỂN ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH

Nguyễn Thị Lê Hương
Đại học Sư phạm - ĐHQGHN

ĐẶT VẤN ĐỀ

Định lý Riemann về thác triển ánh xạ chỉnh hình phát biểu như sau:

Giả sử $f : X \setminus A \to C^n$ là ánh xạ chỉnh hình bị chặn địa phương, trong đó A là tập con giải tích với đối chiều lớn hơn hoặc bằng 1 (codim $A \geq 1$). Khi đó f thác triển được thành ánh xạ chỉnh hình $F : X \to C^n$.

Định lý Riemann nói trên giữ một vai trò hết sức quan trọng trong giải tích phức nhiều biến. Do vậy việc mở rộng định lý trên đã và đang được nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm. Tiếp tục theo hướng nghiên cứu đó, mục đích của bài báo này là mở rộng định lý Riemann bằng cách thay tập đích C^n bằng nhưngg không gian phức tổng quát hơn.

Trước hết nếu thay C^n bằng một không gian phức tùy ý thì định lý sẽ không còn đúng nữa. Phản ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ điều đó:

Giả sử $\quad \pi : C^{n+1} \setminus \{0\} \to CP^n \quad (z_1, z_2, \cdots, z_{n+1}) \mapsto [z_1; z_2 : \cdots : z_{n+1}]$

là phép chiếu chính tắc. Do CP^n là compact nên π là ánh xạ chỉnh hình bị chặn địa phương.

Ta có $\quad \pi((\xi, 0, 0, \cdots, 0)) = \pi((1, 0, \cdots, , 0))$ và

$$\pi((\xi, \xi, 0, \cdots, 0)) = \pi((1, 1, 0, \cdots, 0)) \quad \forall \xi \neq 0$$

Do $\lim\limits_{\xi \to 0} \pi((\xi, 0, \cdots, 0)) \neq \lim\limits_{\xi \to 0} \pi((\xi, \xi, 0, \cdots, 0))$ nên π không thác triển được thành ánh xạ chỉnh hình $F : C^{n+1} \to CP^n$.

Đến đây một câu hỏi rất tự nhiên được đặt ra là trong những điều kiện nào của không gian phức Y thì định lý Riemann là đúng khi thay thế tập đích C^n bởi không gian Y?

Để giải quyết câu hỏi trên trước hết ta đưa vào một số định nghĩa sau:

01. Định nghĩa:

Giả sử X và Y là hai không gian phức. A là một tập con khác rỗng của X. Ta nó rằng ánh xạ $f : X \setminus A \to Y$ là bị chặn địa phương trên X nếu với mỗi điểm $x \in X$, tồn tại một lân cận U của x trong X sao cho $f(U \setminus A)$ compact tương đối trong Y.

02. Định nghĩa:

Giả sử M là không gian phức. Ta nói rằng M có tính chất thác triển chỉnh hình bị chặn địa phương (viết tắt là LBHEP) nếu với mọi ánh xạ chỉnh hình bị chặn địa phương $f : X \setminus A \to M$, trong đó A là tập con giải tích codim $A \geq 1$ trong đa tạp phức X, thì f đều thác triển được thành ánh xạ chỉnh hình $F : X \to M$.

Định lý Riemann cho thấy rằng C^n ($n \geq 1$) là không gian có LBHEP.

03. Định nghĩa (xem Kobayashi [2]):

Giả sử M là không gian phức, $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ là đĩa đơn vị mở rộng trong C. Giả sử p và q là hai điểm tùy ý của M, $p \neq q$. Xét họ các ánh xạ chỉnh hình $\{f_i : D \to M\}_{i=1}^{n}$ và họ điểm $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ thỏa mãn $f_1(0) = p$, $f_i(a_i) = f_{i+1}(0)$, $f_n(a_n) = q$. Lập tổng $\sum_{i=1}^{n} \rho(0, a_i)$, trong đó ρ là metric Bergman−Poincaré trên đĩa đơn vị D. Đặt $d_M = \inf\left(\sum_{i=1}^{n} \rho(0, a_i)\right) \geqslant 0$. Ta thấy d_M thỏa mãn các tiên đề về giả khoảng cách là:

$$d_M(p, q) = d_M(q, p) \qquad \forall p, q \in M$$

$$d_M(p, r) \leq d_M(p, q) + d_M(q, r) \qquad \forall p, q, r \in M$$

$$d_M(p, q) \geq 0 \qquad \forall p, q \in M$$

Giả khoảng cách d_M được gọi là không gian phức hyperbolic nếu d_M là khoảng cách (nghĩa là $d_M(p, q) = 0$ khi và chỉ khi $p = q$).

1. Định lý chính:

Giả sử X là không gian phức. Khi đó X có LBHEP khi và chỉ khi mọi tập con mở liên thông compact tương đối trong X đều là không gian hyperbolic.

Chứng minh:

($\Rightarrow$). Giả sử tồn tại một tập con mở liên thông compact tương đối X_0 trong X mà X_0 không là không gian hyperbolic. Giả sử X_1 là tập con mở liên thông compact tương đối trong X mà $\overline{X}_0 \subset X_1$. Do X_0 không là hyperbolic nên $\sup\{h_{X_0}(f(0)) : f \in \mathrm{Hol}(D, X_0)\} = \infty$, trong đó h_{X_0} là metric Hermite trên không gian tiếp xúc Zariski TX_0 của X_0. Vì vậy tồn tại một dãy $\{f_n\} \subset \mathrm{Hol}(D, X_0)$ sao cho $h_{X_0}(f_n(0)) = r_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Với mọi $n \geq 1$, xét ánh xạ chỉnh hình $g_n : Dr_n \to M$ như sau

$$g_n(z) = f_n\left(\frac{z}{r_n}\right) \quad \forall z \in Dr_n\,,$$

trong đó $Dr = \{z \in C : |z| < r\}$, $\forall r > 0$.

Áp dụng bổ đề tham số hóa của Brody [1], tồn tại dãy ánh xạ chỉnh hình $\{\varphi_n : Dr_n \to X_0\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $h_{x_0}(\varphi_n'(0)) = 1$ với mọi $n \geq 1$ và $\{\varphi_n\}$ hội tụ đều đến $\varphi \in \mathrm{Hol}(C, X)$. Ta có $\varphi \neq$ const vì $h_{x_0}(\varphi'(0)) = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n'(0)) = 1$. Dễ thấy $\varphi(C) \subset \overline{X}_0 \subset X_1$, vì thế X_1 chứa đường thẳng phức (không tầm thường) $\varphi : C \to X_1 \subset X$.

Đặt $\varphi * h = u dz \otimes d\bar{z}$, trong đó u là hàm nhẵn không âm trên C và $u(0) = 1$.

Chọn $r > 0$ sao cho $u(z) > 0$ khi $|z| \leq r$. Đặt $m = \inf\{u(z) : |z| \leq r\} > 0$. Xét ánh xạ $\psi(z) = \varphi(r.e^{1/z})$, $z \in C \setminus \{0\}$. Ta có ψ là ánh xạ chỉnh hình từ $C \setminus \{0\}$ vào $X_1 \hookrightarrow X$, bị chặn địa phương, do đó ψ thác triển được thành ánh xạ chỉnh hình $\widetilde{\psi} : C \to X$.

Đặt $\widetilde{\psi} * h = v dz \otimes d\bar{z}$. Xét trên $C \setminus \{0\}$ ta có:

$$\widetilde{\psi} * h = \psi * h = r^2|e^{1/z}|^2 \cdot \frac{1}{|z|^4}\, u(re^{1/z})\, dz \otimes d\bar{z}\,.$$

Với $y \in R \setminus \{0\}$ ta có $v(iy) = r^2|e^{1/iy}|^2 \cdot \frac{1}{|iy|^4}\, u(re^{1/iy}) = r^2|e^{-i(1/y)}|^2\, \frac{1}{|y|^4}\, u(re^{-i(1/y)})$

$$\geq \frac{1}{y^4} \cdot r^2 \cdot m = \frac{mr^2}{y^4}$$

Mặt khác $v(0) = \lim_{y\to 0} v(iy) = \lim_{y\to 0} \frac{mr^2}{y^4} = \infty$. Điều đó vô lí.

($\Leftarrow$). Giả sử $f : M \setminus A \to X$ là chỉnh hình, bị chặn địa phương, trong đó A là tập con giải ích với codim $A \geq 1$ trong đa tạp M. Xét $a \in A$, do f bị chặn địa phương nên tồn tại lân cận mở U của a trong M, tồn tại tập con mở tập con mở liên thông compact tương đối X_1 chứa trong X sao cho $\overline{f(U \setminus A)}$ compact trong X_1.

Xét ánh xạ chỉnh hình $f|_{U\setminus A} : U \setminus A \to X_1$. Do X_1 là hyperbolic nên theo định lý Kwack [3] $f|_{U\setminus A}$ thác triển được thành ánh xạ chỉnh hình $\overline{F} : U \to X_1 \hookrightarrow X$. Vậy ánh xạ chỉnh hình $f : M \setminus A \to X$ thác triển được thành ánh xạ chỉnh hình $F : M \to X$.

2. Định lý:

Giả sử X là không gian phức. Khi đó X có LBHEP khi và chỉ khi mọi ánh xạ chỉnh hình bị chặn $f : C \to X$ (tức là $f(C) \subset X$) đều là ánh xạ hằng.

Chứng minh:

($\Rightarrow$). Giả sử $f : C \to X$ là ánh xạ chỉnh hình bị chặn. Khi đó tồn tại tập con mở liên thông compact tương đối X_1 trong X sao cho $f(C) \subset X_1$. Do X có LBHEP nên X_1 là hyperbolic (theo định lý 1), và vậy f là ánh xạ hằng.

($\Leftarrow$). Ta phải chứng minh mọi tập con mở liên thông compact tương đối của X là hyperbolic. Giả sử tồn tại X_0 là một tập con mở liên thông compact tương đối của X là hyperbolic. Giả sử tồn tại X_0 là một tập con mở liên thông compact tương đối của X mà X_0 không là hyperbolic. Lập luận tương tự như trong chứng minh định lý 1, tồn tại tập con mở liên thông compact tương đối $X_1 \subset X$ và ánh xạ chỉnh hình $\phi : C \to X_1$ mà ϕ khác hằng. Khi đó $\phi : C \to X$ chỉnh hình, bị chặn và khác hằng. Điều này vô lí.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. R. Brody. Compact manifolds and hyperbolicity. Trans. Amer. Math. Soc., 235 (1978), 213–219.
2. S. Kobayashi. Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings. M. Dekker, New York, 1970.
3. M. H. Kwack. Generalization of the big Picard theorem, Ann. Math., 90 (1969), 9–22.

VNU. JOURNAL OF SCIENCE, NAT. SCI., t.XI, n°4, 1995

GENERATING THE RIEMANN THEOREM ON THE EXTENSION OF HOLOMORPHIC MAPPING

Nguyen Thi Le Huong
Teacher's Training College – VNU

The main aim of this note is to generate the Riemann theorem on the extension of locally bounded holomorphic mapping functions. We prove that a complex manifold X has the locally bounded holomorphic extension property (shortly LBHEP) iff every relatively compact open subset of X is hyperbolic. Moreover, we also prove that a complex manifold X has LBHEP iff every holomorphic map from C into X with the image $f(C) \subset X$ is constant.